POSTGRAU | MÁSTER EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS

Ejercicios 6 (continua) resueltos

1.- Calcular la esperanza de vida a los cuarenta años sabiendo que la función de cohorte es

$$l(x) = (100 - x)/190$$

$$l_{40} = (100 - 40)/190) = 0{,}315$$

$$T_{40} = \int_{40}^{100} \frac{100 - x}{190} dx = \frac{1}{190}\left[100x - \frac{x^2}{2}\right]_{40}^{100}$$
$$= \frac{1}{190}\left[\left(10000 - \frac{10000}{2}\right) - \left(4000 - \frac{1600}{2}\right)\right] = 9{,}47368$$

luego esperanza de vida:

$$\overline{e_{40}} = \frac{T_{40}}{l_{40}} = \frac{9{,}47368}{0{,}315} = 30$$

2.-Hallar la esperanza de vida de una persona de 60 años cuando tenga 65 ,si conocemos que su función de cohorte es $\boldsymbol{l_x = 1000000\left(1 - \frac{x}{100}\right)}$

$$l_{60} = 1000000\left(1 - \frac{60}{100}\right) = 400000$$

$$T_{100} - T_{65} = \int_{65}^{100} 1000000(1 - \frac{x}{100})dx = 1000000\left[x - \frac{x^2}{200}\right]_{65}^{100}$$
$$= 1000000\left[\left(100 - \frac{10000}{200}\right) - \left(65 - \frac{4225}{200}\right)\right] = 1000000 \cdot 6{,}125$$
$$= 6125000$$

$$_{t/}\bar{e}_x = {}_{5/}\bar{e}_{60} = \frac{T_{65}}{l_{60}} = \frac{6125000}{40000} = 15{,}3125$$

3.-Hallar la esperanza de vida de una de 60 años en los próximos 10.

$$ {}_{t}\bar{e}_{x} = {}_{10}\bar{e}_{60} = \frac{T_{60} - T_{70}}{l_{60}} = \frac{8000000 - 4500000}{400000} = 8{,}75 $$

$$ T_{100} - T_{60} = \int_{60}^{100} 1000000(1 - \frac{x}{100})dx = 1000000\left[x - \frac{x^2}{200}\right]_{60}^{100} $$
$$ = 1000000\left[\left(100 - \frac{10000}{200}\right) - \left(60 - \frac{3600}{200}\right)\right] = 1000000 \cdot 8 $$
$$ = 8000000 $$
$$ T_{100} - T_{70} = \int_{70}^{100} 1000000(1 - \frac{x}{100})dx = 1000000\left[x - \frac{x^2}{200}\right]_{70}^{100} $$
$$ = 1000000\left[\left(100 - \frac{10000}{200}\right) - \left(70 - \frac{4900}{200}\right)\right] = 1000000 \cdot 4{,}5 $$
$$ = 4500000 $$

4.-En base a lo anterior cuanto valdrá la esperanza de vida de una persona de 60 años.

$$ \bar{e}_{x} = \bar{e}_{60} = {}_{t}\bar{e}_{x} + {}_{t/}\bar{e}_{x} = 4{,}6875 + 15{,}3125 = 20 $$

$$ \bar{e}_{x} = \bar{e}_{60} = \frac{T_{60}}{l_{60}} = \frac{8000000}{400000} = 20 $$

5.-Con la misma cohorte: Esperanza de vida abreviada y esperanza de vida de una persona de 95 años

$$ l_{95} = 1000000\left(1 - \frac{95}{100}\right) = 50000 $$
$$ l_{96} = 1000000\left(1 - \frac{96}{100}\right) = 40000 $$
$$ l_{97} = 1000000\left(1 - \frac{97}{100}\right) = 30000 $$
$$ l_{98} = 1000000\left(1 - \frac{98}{100}\right) = 20000 $$
$$ l_{99} = 1000000\left(1 - \frac{99}{100}\right) = 10000 $$

$e_{95} = \frac{\sum_{x=96}^{99} l_x}{l_{95}} = \frac{100000}{50000} = 2$ abreviada

$$T_{100} - T_{95} = \int_{95}^{100} 1000000(1 - \frac{x}{100})dx = 1000000\left[x - \frac{x^2}{200}\right]_{95}^{100}$$
$$= 1000000\left[\left(100 - \frac{100}{200}\right) - \left(95 - \frac{9025}{200}\right)\right] = 1000000 \cdot 0{,}125$$
$$= 125000$$

$$\bar{e}_x = \bar{e}_{95} = \frac{T_{95}}{l_{95}} = \frac{125000}{50000} = 2{,}5$$

entiéndase abreviada como que los fallecidos lo hacen en el día de cumplir esa edad

6.- calcular esperanza a la edad X con $\boldsymbol{l_x = 100 - x \;\; para\; 0 \leq x \leq 100}$

$$\bar{e}_x = \int_0^{\omega - x} {}_tp_p\, dt = \int_0^{100-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt = \int_0^{100-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt = \int_0^{100-x} \frac{100-(x+t)}{100-x} dt$$
$$= \int_0^{100-x} (1 - \frac{t}{100-x})dt = \frac{100-x}{2}$$

7.-calcular la edad media de fallecimiento para las persona que fallecen entre los 25 y los 26 años.con$\boldsymbol{l_x = 100 - x \;\; para\; 0 \leq x \leq 100}$

25+f= 25,5

$\frac{T_{25} - T_{26} - 1 \cdot l_{26}}{l_{25} - l_{26}} = \frac{2812{,}5 - 2738 - 74}{1} = 0{,}5 = f$ vida media residual

$$T_{25} = \int_{25}^{100} (100 - x)dx = \left[100x - \frac{x^2}{2}\right]_{25}^{100} = (5000 - 2187{,}5) = 2812{,}5$$

$$T_{26} = \int_{26}^{100} (100 - x)dx = \left[100x - \frac{x^2}{2}\right]_{26}^{100} = (5000 - 2262) = 2738$$

$$l_{25} = 100 - 25 = 75$$
$$l_{26} = 100 - 26 = 74$$

8.-Con la misma función de cohorte $\boldsymbol{l_x = 100 - x}$

$\boldsymbol{para\ 0 \leq x \leq 100}$ calcular la esperanza de vida entre los 40 y 45 de una persona que actualmente tiene 30 años

$$_{n/t}\bar{e} = {}_{10/5}\bar{e} = \frac{T_{x+n} - T_{x+n+t}}{l_x} = \frac{T_{40} - T_{45}}{l_{30}} = \frac{1800 - 1512{,}5}{70} = 4{,}10714$$

$$T_{40} = \int_{40}^{100} (100 - x)dx = \left[100x - \frac{x^2}{2}\right]_{40}^{100} = (5000 - 3200) = 1800$$

$$T_{45} = \int_{45}^{100} (100 - x)dx = \left[100x - \frac{x^2}{2}\right]_{45}^{100} = (5000 - 3487{,}5) = 1512{,}5$$

$$l_{30} = 100 - x = 100 - 30 = 70$$

9.-Conociendo la información anterior. Calcular la probabilidad de que la persona de 30 sobreviva a los 40.

$$_{n/t}\overline{e}_x = {}_nP_x \cdot {}_t\overline{e}_{x+n}$$

$$_t\bar{e}_{x+n} = {}_5\bar{e}_{30+10} = \frac{T_{40 -} T_{45}}{l_{40}} = \frac{1800 - 1512{,}5}{60} = 4{,}791666$$

$$l_{40} = 100 - x = 100 - 40 = 60$$

$$_{10/5}\bar{e}_{30} = 4{,}1 = {}_{10}p_{30} \cdot {}_5\bar{e}_{30+10} = {}_{10}p_{30} \cdot 4{,}79$$

$$_{10}p_{30} = \frac{4{,}1}{4{,}79} = 0{,}85714$$

lógicamente $_{10}p_{30} = \frac{l_{40}}{l_{30}} = \frac{l_{40}=100-x=100-40}{l_{30}=100-x=100-30} = \frac{60}{70} = 0{,}8571$

10.-Edad media de fallecimiento de aquellos que murieron entre los 40 y los 45 si la función de cohorte es l(x)=(100-x)/190 .

$$\frac{T_{40} - T_{45} - 5 \cdot l_{45}}{l_{40} - l_{45}} = \frac{1{,}51316 - 5 \cdot 0{,}28947}{0{,}02622} = 2{,}5 = f$$

$$T_{40} - T_{45} = \int_{40}^{45} \frac{100 - x}{190} dx = \frac{1}{190}\left[100x - \frac{x^2}{2}\right]_{40}^{45} = 1{,}51316$$

$$l_{40} = (100 - x)/190 = 60/190 = 0{,}3157$$

$$l_{45} = (100 - x)/190 = 55/190 = 0{,}28947$$

luego 40+2,5=42,5

11.-En la cohorte anterior. Tasa instantánea de fallecimiento la edad de 40 años.

$$\mu_{40} = -\frac{\grave{l}(40)}{l(40)} = -\frac{-\frac{1}{190}}{\frac{100-40}{190}} = \frac{1}{100 - x} = 0{,}01667$$

12.-Si la probabilidad de supervivencia a los 70 años es de 0,9679 y la esperanza de vida completa a dicha edad es de 12,76 , calcular la esperanza de vida a los 71.

$p_x = \frac{e_x}{1+e_{x+1}} = \frac{e_x^0 - 0{,}5}{1+e_{x+1}}$=0,9679

$$\frac{e_x^0 - 0{,}5}{1 + e_{x+1}} = \frac{12{,}26 - 0{,}5}{1 + e_{x+1}} = 0{,}9679$$

$$(1 + e_{x+1}) \cdot 0.9679 = 11{,}76 \Rightarrow 0{,}9679 + 0{,}9679 e_{x+1} = 11{,}76 \quad \Rightarrow 10{,}7921 = 0{,}9679 e_{x+1} \Rightarrow e_{71} = 11{,}15$$

$p_x = \frac{e_x}{1+e_{x+1}} = \frac{e_x^0 - 0{,}5}{1+e_{x+1}}$=0,9679

como error al tomar valor 12,26 en vez de 12,76
con el valor correcto será

$$\frac{e_x^0 - 0{,}5}{1 + e_{x+1}} = \frac{12{,}76 - 0{,}5}{1 + e_{x+1}} = 0{,}9679$$

$$(1 + e_{x+1}) \cdot 0.9679 = 12{,}26 \Rightarrow 0{,}9679 + 0{,}9679 e_{x+1} = 12{,}26 \quad \Rightarrow 11{,}2921 = 0{,}9679 e_{x+1} \Rightarrow e_{71} = 11{,}6665$$