Ejercicios 7 (continua)

1.- Un colectivo se supone que se comporta de forma que tiene un tanto instantáneo de mortalidad de $\mu(x)=0.0002x$. Determinar a que edad una cohorte inicial de 100000 individuos se verá reducida a 70000

Conocemos $\mu(x)$, l_0,l_x y queremos determinar el valor de x. Por lo tanto debemos relacionar estas funciones biométricas:

Por un lado tenemos:

$$\frac{l_x}{l_0}=\left(\frac{70000}{10000}=0.7\right)=\frac{l(x)}{l(0)}={}_xp_0=\frac{\cancel{l_0}S(x)}{\cancel{l_0}S(0)}=S(x)$$

Y por otro lado:

$$S(x)=e^{-\int_0^x \mu(y)dy}=e^{-\int_0^x 0.0002y\,dy}=e^{-[0.0001y^2]_0^x}=e^{-0.0001x^2}$$

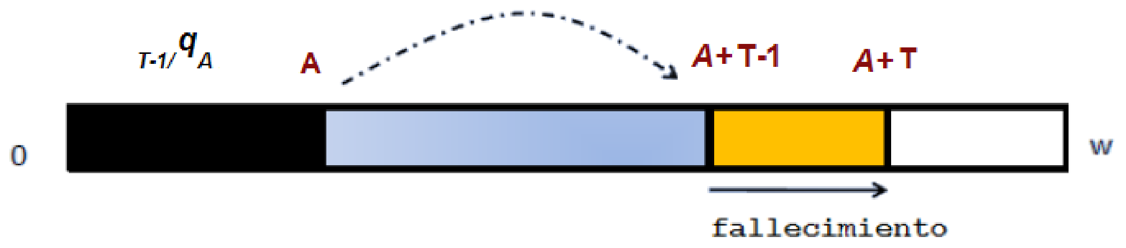
Por lo tanto:

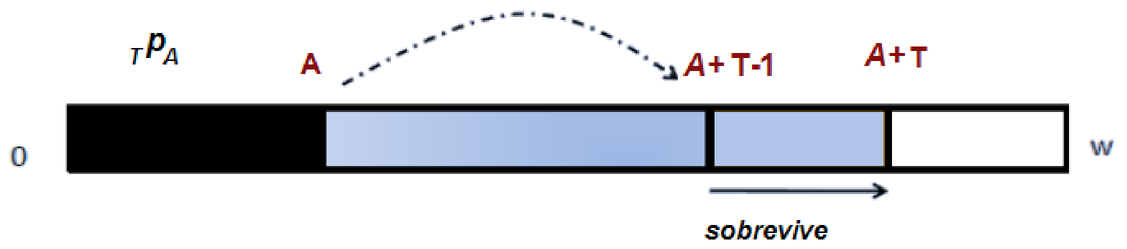
$$S(x)=0.7=e^{-0.0001x^2}\rightarrow x^2=-\frac{\ln 0.7}{0.0001}\rightarrow x=\sqrt{-\frac{\ln 0.7}{0.0001}}=59.72\text{ años}$$

2.- Se conoce de una determinada población asegurada que la probabilidad de que un individuo de A años sobreviva T años más es de 0.9 y que la probabilidad de que un individuo de A años sobreviva (T-1) y muera antes de alcanzar los T años más es de 0.025 . Determinar la probabilidad de un individuo muera a la edad de A+T-1 años

---

Sabemos que : ${}_Tp_A=0.9$ y que ${}_{T-1/1}q_A={}_{T-1/}q_A=0.025$





Como la probabilidad de sobrevivir hasta t la podemos escindir en hacerlo hasta T-1 y luego de A+T-1 a A+T tendremos que :

${}_Tp_A={}_{T-1}p_A\cdot p_{A+T-1}$

Y por otro lado la probabilidad la probabilidad diferida ${}_{T-1/}q_A$ también se puede ver como la probabilidad de primero sobrevivir hasta A+T-1 y luego fallecer al año siguiente:

${}_{T-1/}q_A = {}_{T-1}p_A . q_{A+T-1}$

Sumando las dos ecuaciones tendremos que :

$$\left.\begin{array}{l} {}_T p_A = {}_{T-1}p_A . p_{A+T-1} \\ {}_{T-1/}q_A = {}_{T-1}p_A . q_{A+T-1} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 0.9 = {}_{T-1}p_A . p_{A+T-1} \\ 0.025 = {}_{T-1}p_A . q_{A+T-1} \end{array}\right\} + \rightarrow 0.925 = {}_{T-1}p_A$$

(Ya que $p_{A+T-1} + q_{A+T-1} = 1$)

Y sustituyendo y despejando en la segunda:

$$0.025 = {}_{T-1}p_A . q_{A+T-1} \rightarrow 0.025 = 0.925 . q_{A+T-1} \rightarrow \boxed{q_{A+T-1} = \frac{0.025}{0.925} = 0.0\overset{\frown}{27}}$$

3.- Se sabe que l_{37}=95190 y que m_{37}= 0.002 Determinar el número de fallecidos a los 37 años.

$$m_{37} = \frac{d_{37}}{L_{37}} = \frac{d_{37}}{l_{37} - \frac{d_{37}}{2}} = \frac{2d_{37}}{2l_{37} - d_{37}} \rightarrow m_{37}(2l_{37} - d_{37}) = 2d_{37} \rightarrow d_{37} = \frac{2.m_{37}l_{37}}{2 + m_{37}} = \frac{2.95190 \cdot 0.002}{2.002} =$$

$$\boxed{d_{37} = 190.19 \simeq 190}$$

4.(Similar a Pavia 59) Sabiendo que la mortalidad de un población sigue una ley de Sang según la cual:

$$l(x) = l_0 \frac{(B^x - B^\omega)}{(1 - B^\omega)}$$

Donde ω es infinito actuarial , que en esta población es 115 y B es una parámetro propio de esta ley que para esta población toma el valor de 0.97.Calcular el tanto instantáneo de mortalidad para una persona de 60 años.

$$\mu(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{\frac{\cancel{l_0} \ln B.B^x}{\cancel{(1-B^\omega)}}}{\frac{\cancel{l_0}(B^x - B^\omega)}{\cancel{(1-B^\omega)}}} = -\frac{\ln B.B^x}{(B^x - B^\omega)} = -\frac{\ln B}{1 - B^{\omega - x}} = \frac{\ln B}{\left(B^{\omega - x} - 1\right)}$$

Que para B=0.97 y ω=115 nos da :

$$\mu(x) = \frac{\ln 0.95}{0.95^{115-x} - 1} \rightarrow \mu(60) = \frac{\ln 0.95}{0.95^{115-60} - 1} = 0.05319$$

---

5. (Similar a Pavía 60) La función de supervivencia de cierto colectivo es :

$$S(x)=\frac{1}{4}\left(e^{-0.015x}+1.6347-0.015x\right) \quad \text{con } 0\leq x\leq 120$$

a)Determinar la edad para la cual el número de fallecidos es máximo y determinar el valor de esta magnitud
b)Determinar la edad para la que la probabilidad de fallecimiento q_x es máxima
.

---

a)El número de fallecidos es :

$$d_x=l_0\left(S(x)-S(x+1)\right)=l_0\frac{1}{4}\left(e^{-0.015x}+1.6347-0.015x\right)-l_0\frac{1}{4}\left(e^{-0.015(x+1)}+1.6347-0.015\left(x+1\right)\right)=$$

$$d_x=l_0\frac{1}{4}(e^{-0.015x}-e^{-0.015(x+1)}-0.015x+0.015\left(x+1\right))=l_0\frac{1}{4}\left(e^{-0.015x}(1-e^{-0.015})+0.015\right)$$

Y esta expresión será máxima cuando lo sea
$e^{-0.015x}(1-e^{-0.015})$ ya que el resto no depende de la edad (Derivando e igualando a cero podremos obtener el máximo, derivar es posible porque aunque dx sea una magnitud discreta esta definida para todo x de 0 a 120 y a través de funciones continuas y derivables en ese intervalo:

La derivada de $e^{-0.015x}(1-e^{-0.015})$ será:

$$y'=(-0.015).e^{-0.015x}(1-e^{-0.015})=\left(-0.015+0.015e^{-0.015}\right)e^{-0.015x}$$

Se observa que y’ es siempre NEGATIVA y es creciente aunque nunca se anulara (tiende asintóticamente a cero) eso quiere decir que y será decreciente y que por lo tanto su valor máximo se alcanza en su primer valor→ x=0 por lo tanto el máximo de la función de fallecimientos también se alcanza en cero dando un valor para la función de:

$$d_0=l_0\frac{1}{4}\left(e^{-0.015.0}.(1-e^{-0.015})+0.015\right)=l_0\frac{1}{4}\left((1-e^{-0.015})+0.015\right)\simeq 0.5\,l_0$$

b)A pesar de lo que pudiera parecer para cualquier población la probabilidad de fallecimiento q_x es siempre máxima a la edad ω-1 que alcanza el valor 1 ya que en ω no sobrevive ya nadie.

---

6. (Similar a Pavía 61) La función de supervivencia de una población sigue una ley de De Moivre, con máximo tiempo de vida 120 años

$$S(x)=1-\frac{x}{120}$$

a) expresar d_x en función de la cohorte inicial

b) como es el tanto instantáneo de mortalidad
c) Determina la esperanza de vida al nacer y la vida media probable (mediana de la variable vida residual) al nacer

a)

$$d_x = l_0\left(S(x) - S(x+1)\right) = l_0\left(\left(1-\frac{x}{120}\right) - \left(1-\frac{x+1}{120}\right)\right) = \left(\frac{x+1}{120} - \frac{x}{120}\right) = \frac{l_0}{120}$$

Es decir cada año fallece un 120-avo de la población hasta desaparecer a los 120 años

b) $\mu(x) = -\dfrac{S'(x)}{S(x)} = -\dfrac{-\frac{1}{120}}{\left(1-\frac{x}{120}\right)} = \dfrac{1}{120-x}$

Que es una función "aceleradamente" creciente

c)

$$\overline{e}_x = \int_0^{120-x} {}_t p_x dt = \int_0^{120-x} \frac{S(x+t)}{S(x)} dt = \int_0^{120-x} \frac{1-\frac{x+t}{120})}{1-\frac{x}{120}} dt = \int_0^{120-x} \frac{120-\left(x+t\right)}{120-x} dt =$$

$$= \overline{e}_x = \frac{1}{120-x}\int_0^{120-x} 120-x-t\,dt = \frac{1}{120-x}[120t - xt - \frac{t^2}{2}]_0^{120-x} =$$

$$= \frac{1}{120-x}\left(120(120-x) - (120-x)x - \frac{\left(120-x\right)^2}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{120-x}\left(120^2 - \cancel{120x} - 120x + x^2 - \frac{120^2}{2} + \cancel{120x} - \frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \overline{e}_x = \frac{1}{120-x}\left(\frac{120^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 120x\right) = \frac{\frac{\left(120-x\right)^2}{2}}{120-x} = \frac{120-x}{2}$$

Que al nacer será una esperanza de vida de 60 años

Respecto a la vida media probable **al nacer** es la mediana de la edad de fallecimiento y por tanto:F(x)=0.5 → S(x)=0.5→ 60 años

7.- (similar a Pavia 55) La función de supervivencia de cierto colectivo es :

$$S(x) = \frac{1}{2}(1 - 0.01x + e^{-0.02x}) \qquad \text{para } x \in [0,110]$$

Obtener:

a) El tanto instantáneo de mortalidad para una edad de 58 años
b) La función de densidad de la variable edad de la muerte
c) El número medio de años que vive , por término medio cada fallecido entre los 70 y los 71 años.

---

a)El tanto instantáneo de mortalidad vendrá dado por:

$$\mu(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{\frac{1}{2}\left(-0.02e^{-0.02x} - 0.01\right)}{\frac{1}{2}\left(1+e^{-0.02x} - 0.01x\right)} = \frac{0.02e^{-0.02x} + 0.01}{\left(1+e^{-0.02x} - 0.01x\right)}$$

Que para 58 años toma el valor: μ_{58}=0.02218

b) $f(x) = F'(x) = -S'(x) = \dfrac{0.02e^{-0.02x} + 0.01}{2}$

c) el número medio de años de vida que vivirán los que fallezcan entre los 70 y 71 años vendrá dado por la expresión:

$$_1\overline{f}_{70} = \int_0^1 \frac{l(70+t) - l(71)}{l(70) - l(71)} dt = \int_0^1 \frac{S(70+t) - S(71)}{S(70) - S(71)} dt =$$

$$= \frac{1}{S(70) - S(71)} \left(\int_0^1 S(70+t)dt - S(71) \right)$$

Los valores de S(70) y S(71) se calculan directamente de la expresión de S(x) como:

S(70)=0.27330 y S(71)=0.26586

Y por otra parte la integral quedará como:

$$\int_0^1 S(70+t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 1 - 0.01(70+t) + e^{-0.02(70+t)}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dt - \int_0^1 0.7dt - \int_0^1 0.01t\,dt + e^{-1.4}.\int_0^1 e^{-0.02t}dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0.3 - 0.005 + \frac{e^{-0.07}}{-0.02}\int_0^1 -0.02e^{-0.02t}dt \right) = \frac{1}{2}\left(0.3 - 0.005 + \frac{e^{-0.07}}{-0.02}\left[e^{-0.02t} \right]_0^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0.3 - 0.005 + \frac{e^{-0.07}}{0.02}(1 - e^{-0.02}) \right) = 0.269575$$

Y sustituyendo en la expresión inicial da : 0.49933