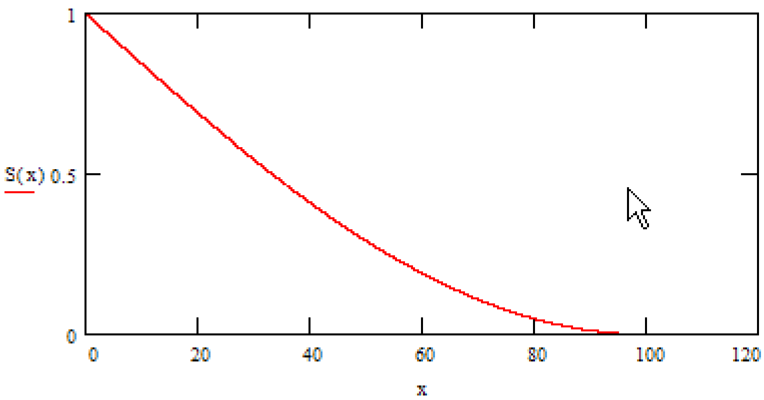
Ejercicios 8 (continua) resueltos

1.- Consideremos un colectivo cuya función de supervivencia obedece a la expresión:

$$S(x) = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{200}\right)$$



A ¿Cuál es la probabilidad de fallecer antes de los 70 años

B ¿Cuál es la probabilidad de fallecer exactamente a la edad de 70?

C ¿Cuántos años por término medio cabe esperar que sobrevivan las personas que fallezcan a los 70 años?

A) $_{70}q_0 = 1 - {}_{70}p_0 = 1 - S(70) = 1 - (1 - sen(\frac{70\pi}{200}) = sen(\frac{70\pi}{200}) = 0.89101$

B)

$$q_{70} = \frac{l(70) - l(71)}{l(70)} = \frac{S(70) - S(71)}{S(70)} = \frac{(1 - sen(\frac{70\pi}{200})) - (1 - sen(\frac{71\pi}{200}))}{(1 - sen(\frac{70\pi}{200}))} = \frac{sen(\frac{71\pi}{200}) - sen(\frac{70\pi}{200})}{(1 - sen(\frac{70\pi}{200}))} = 0.06438$$

64,38 por mil

C)

$$_1\overline{f}_{70} = \int_0^1 \frac{l(70+t) - l_{71}}{l_{70} - l_{71}} dt = \int_0^1 \frac{S(70+t) - S(71)}{S(70) - S(71)} dt = \frac{\left(\int_0^1 S(70+t)dt\right) - S(71)}{S(70) - S(71)}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\int_0^1 1 - sen\left(\frac{(70+t)\pi}{200}\right) dt = 1 - \int_0^1 sen\left(\frac{(70+t)\pi}{200}\right) dt = 1 - \frac{200}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi}{200} sen\left(\frac{(70+t)\pi}{200}\right) =$$

$$1 - \frac{200}{\pi}(-\left[\cos(\frac{(70+t)\pi}{200})\right]_0^1 = 1 + \frac{200}{\pi}(\cos\frac{71\pi}{200} - \cos\frac{70\pi}{200}) = 0.10546455$$

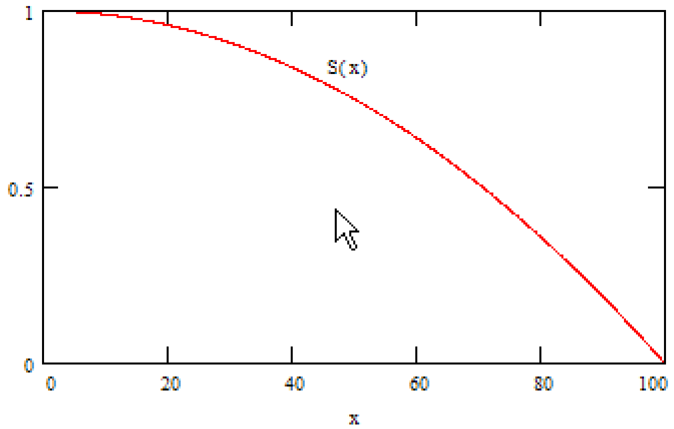
De forma que :

$$ {}_1\overline{f}_{70} = \frac{\left(\int_0^1 S(70+t)dt\right) - S(71)}{S(70)-S(71)} = \frac{0.105464556 - 0.101972}{0.1089935 - 0.101972} = 0.4974 $$

Poco menos de medio año, prácticamente el mismo resultado que suponiendo uniformidad.

2.-Idem. (A,B,C) Para 80 años. Considerando que ahora la función de supervivencia es:

$$ S(x) = \left(1 - \frac{x^2}{10000}\right) $$



A) $ {}_{80}q_0 = 1 - {}_{80}p_0 = 1 - S(80) = 1 - (1 - \frac{80^2}{100000}) = 0.64 $

B) $ q_{70} = \frac{l(80)-l(81)}{l(80)} = \frac{S(80)-S(81)}{S(80)} = \frac{(1-\frac{80^2}{10000})-(1-\frac{81^2}{10000})}{(1-\frac{80^2}{10000})} = \frac{\frac{81^2}{10000}-\frac{80^2}{10000}}{(1-\frac{80^2}{10000})} = \frac{0.6561-0.64}{0.36} = 0.04472 $

44,72 por mil

C)

$$ {}_1\overline{f}_{80} = \int_0^1 \frac{l(80+t)-l_{81}}{l_{80}-l_{81}} dt = \int_0^1 \frac{S(80+t)-S(81)}{S(80)-S(81)} dt = \frac{\left(\int_0^1 S(80+t)dt\right) - S(81)}{S(80)-S(81)} $$

Por otro lado tenemos que:

$$\int_0^1 1-\frac{(80+t)^2}{10000}dt = 1-\frac{1}{10000}\int_0^1\left(6400+160t+t^2\right)dt =$$

$$1-\frac{1}{10000}\left[6400t+80t^2+\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1-\frac{\left[6400+80+\frac{1}{3}\right]}{10000} = 0.35196666$$

De forma que :

$$_1\overline{f}_{80} = \frac{\left(\int_0^1 S(80+t)dt\right)-S(81)}{S(80)-S(81)} = \frac{0.3519666-0.3439}{0.36-0.3439} = 0.50104$$

Poco más de medio año, prácticamente el mismo resultado que suponiendo uniformidad.

3.- (Similar 71 Pavia) De una tabla de mortalidad se ha obtenido que el número de individuos que alcanzaron los 57 años de entre un cohorte inicial de un millón fueron
l_{57}=921102 se ha sabido, también que el tanto central de mortalidad a esa edad ha sido de: m_{57}=0.0022869. Calcular el número de personas que cumplirán los 58 años: l_{58} .

De la definición de tanto central de mortalidad (defunciones en relación a la función censal de supervivientes de esa edad) y suponiendo la uniformidad de la mortalidad a lo largo del año:

$$m_{57} = \frac{d_{57}}{L_{57}} = \frac{d_{57}}{l_{57}-\frac{d_{57}}{2}} = \frac{\frac{d_{57}}{l_{57}}}{\frac{l_{57}}{l_{57}}-\frac{1}{2}\frac{d_{57}}{l_{57}}} = \frac{q_{57}}{1-\frac{q_{57}}{2}}$$

Despejando:

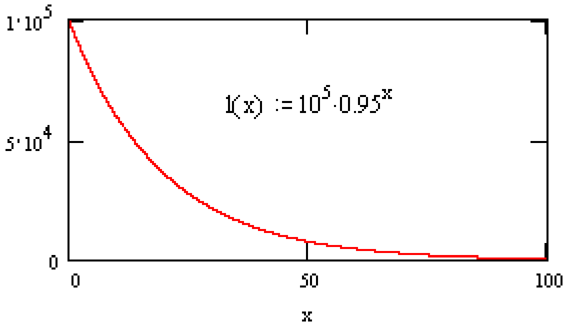
$$m_{57}(1-\frac{q_{57}}{2}) = q_{57} \rightarrow 2m_{57}-m_{57}q_{57} = 2q_{57} \rightarrow 2m_{57} = 2q_{57}+m_{57}q_{57} = q_{57}(2+m_{57}) \rightarrow$$

$$\rightarrow q_{57} = \frac{2m_{57}}{2+m_{57}} = \frac{2\cdot 0.0022869}{2+0.0022869} = 0.002284288$$

Por lo que :

$$l_{58} = p_{57}.l_{57} = (1-q_{57})l_{57} = (1-0.002284288).921102 = 918997.94 \simeq 918998$$

4. Consideremos un colectivo cuya función de supervivientes de una cohorte inicial de 10000 se comporta según la primera ley de Dormoy $l(x)=KS^x$ con K>0 y 0<S<1 que en esta ocasión se materializa en K=10000 y S=0.95.



a) probar que este modelo es equivalente a considerar que la variable aleatoría x= edad de fallecimiento sigue una distribución exponencial con α=- ln(S)
b) determinar el tanto instantáneo de mortalidad.
c) Obtener la probabilidad de que una persona de 50 años sobreviva 15 años más y compararla con la probabilidad de sobrevivir a los 15 años de edad.
d) determinar el número medio de años que vivirá una persona que fallezca entre los 65 y los 66 años

---

a) Como $l(x)=l_0\, S(x)$ tendremos que $S(x)=l(x) / l_0$

$$S(x)=\frac{l(x)}{l_0}=\frac{l(x)}{l(0)}=\frac{KS^x}{KS^0}=S^x=0.95^x=e^{\ln(0.95)x}=e^{-0.05129x}$$

Por lo tanto la f.de distribución será:$F(x)=1-e^{-0.05129x}$ que es la de una distribución exponencial de parámetro α=0.05129 = - ln(S)
Por cierto que la función de densidad será $f(x)=0.05129.\ e^{-0.05129x}$

b) el tanto instantáneo de mortalidad vendrá dado por:

$$\mu_x=-\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{\ln(S).S^x}{S^x}=-\ln(S)=0.05129$$

Constante para cualquier valor de x

c)

$$_{15}p_{50}=\frac{S(50+15)}{S(50)}=\frac{S^{65}}{S^{50}}=S^{15}=0.95^{15}=e^{-0.05129.15}=0.46319123$$

$$_{15}p_0=S(15)=S^{15}=0.95^{15}=e^{-0.05129.15}=0.46319123$$

Vemos como la probabilidad es la misma la probabilidad de sobrevivir 15 años más no depende del tiempo ya sobrevivido (típica propiedad de la distribución exponencial: NO tiene memoria)

d)

$$_1\overline{f}_{65}=\int_0^1\frac{l(65+t)-l_{66}}{l_{65}-l_{66}}dt=\int_0^1\frac{S(65+t)-S(66)}{S(65)-S(66)}dt=\frac{\int_0^1 e^{-0.05129(65+t)}dt-e^{-0.05129.66}}{e^{-0.05129.65}-e^{-0.05129.66}}$$

Como por otra parte la integral resulta:

$$\int_0^1 e^{-0.05129(65+t)}dt = e^{-0.05129.65}\int_0^1 e^{-0.05129t}dt = -\frac{e^{-0.05129.65}}{0.05129}\int_0^1 -0.05129.e^{-0.05129t}dt =$$

$$= -\frac{e^{-0.05129.65}}{0.05129}\left[e^{-0.05129t}\right]_0^1 = \frac{e^{-0.05129.65}}{0.05129}(1-e^{-0.05129}) = 0.034756614$$

De forma que:

$$_1\overline{f}_{65} = \frac{\int_0^1 e^{-0.05129(65+t)}dt - e^{-0.05129.66}}{e^{-0.05129.65} - e^{-0.05129.66}} = \frac{0.034756614 - 0.033872899}{0.035655566 - 0.033872899} = 0.495726195$$