Ejercicios 9 (continua) resueltos

1.- Sabemos que $l_{75+t}=l_{75}-t$ para $0 \leq t \leq 5$ y que ${}_5q_{75}=0.254$ Se quiere obtener el valor de la esperanza de vida hasta la extinción (abreviada) de una pareja de dos individuos de 75 años: $e_{\overline{75:75}}$ Sol: 4.83483

Por un lado tenemos que la esperanza de vida hasta la extinción de la pareja vendrá dada por:

$$e_{\overline{x:y}}=\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_{\overline{x:y}}=\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_x+\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_y-\sum_{t=1}^{\infty}\left({}_tp_x\cdot{}_tp_y\right) \quad \text{que en nuestro caso será:}$$

$$e_{\overline{75:75}}=\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_{\overline{75:75}}=\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_{75}+\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_{75}-\sum_{t=1}^{\infty}\left({}_tp_{75}\right)^2=2\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_{75}-\sum_{t=1}^{\infty}\left({}_tp_{75}\right)^2$$

Por otro lado tenemos que:

$$0.254={}_5q_{75}=1-{}_5p_{75}=\frac{l_{75}-l_{80}}{l_{80}}=\frac{l_{75}-(l_{75}-5)}{l_{75}}=\frac{5}{l_{75}}\Rightarrow l_{75}=\frac{5}{0.254}=19.68503937$$

De forma que tendremos:

t	l_{75+t}	${}_tp_{75}$	$({}_tp_{75})^2$
1	18.68503937	0.9492	0.90098064
2	17.68503937	0.8984	0.80712256
3	16.68503937	0.8476	0.71842576
4	15. 68503937	0.7968	0.63489024
5	14.68503937	0.746	0.556516
Sum		4.238	3.617952

$$e_{\overline{75:75}}=2\sum_{t=1}^{\infty}{}_tp_{75}-\sum_{t=1}^{\infty}\left({}_tp_{75}\right)^2=2\times 4.238 - 3.618=4.835$$

2.- Sabiendo que ${}_{40}p_{20}$= 0.8 y que ${}_{50}p_{20}$ =0.6 calcular la probabilidad de que de dos personas de 20 años, ninguna fallezca entre los 60 y los 70   sol: 0.64

Si X es la edad de fallecimiento de una persona de 20 años, la probabilidad pedida es

$$\pi = \left(1\text{-P}[(60 < X<70)|X>20]\right)^2 = \left(1\text{-}\frac{\text{P}(60 < X<70)}{\text{P}(X>20)}\right)^2 = \left(1\text{-}\frac{\text{P}(X>60) - \text{P}(X>70)}{\text{P}(X>20)}\right)^2 =$$

$$\left(1 - {}_{40}p_{20} - {}_{50}p_{20}\right)^2 = (1-0.8-0.6)^2 = 0.64$$

3.- Sabiendo que l(x)=100-x (para x≤100)

a)Obtener la esperanza de vida conjunta (hasta disolución) de una pareja de 50 y 60 años.   Sol: 14,666666666 años
b)Si una pareja estuviera formada por dos personas de la misma edad (y) de forma que tienen la misma esperanza de vida en común que la pareja anterior ¿cuántos años tendrían?   56 años

---

a)La esperanza de vida en común (hasta la disolución) será:

$$\overline{e}_{xy} = \int_0^{100-\max(x,y)} t.{}_t p_{xy}.\mu(x+t, y+t)dt = \int_0^{100-\max(x,y)} t.{}_t p_x.{}_t p_y.\left(\mu(x+t)+\mu(y+t)\right)dt$$

$$\overline{e}_{50:60} = \int_0^{100-60} t.{}_t p_{50:60}.\mu(50+t, 60+t)dt = \int_0^{40} t.{}_t p_{50}.{}_t p_{60}.\left(\mu(50+t)+\mu(60+t)\right)dt$$

Como: ${}_t p_x = \frac{l(x+t)}{l(x)}$ tendremos que :

$${}_t p_{50} = \frac{l(50+t)}{l(50)} = \frac{100\text{-}50\text{-t}}{100\text{-}50} = 1\text{-}\frac{\text{t}}{50} \quad \text{y que: } {}_t p_{60} = \frac{l(60+t)}{l(60)} = \frac{100\text{-}60\text{-t}}{100\text{-}60} = 1\text{-}\frac{\text{t}}{40}$$

Y por otro lado :

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{-1}{100-x} = \frac{1}{100-x} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{e}_{50:60} = \int_0^{100-\max(x,y)} t.\left(1-\frac{t}{50}\right).\left(1-\frac{t}{40}\right).\left(\frac{1}{50-t}+\frac{1}{40-t}\right)dt =$$

$$\frac{1}{50\cdot 40}\int_0^{40} t.(50-t).(40-t).\left(\frac{40-t+50-t}{(50-t)(40-t)}\right)dt =$$

$$\bar{e}_{50:60} = \frac{1}{50\cdot 40}\int_0^{40}\left(90t-2t^2\right)dt = \frac{1}{50\cdot 40}\left[45t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{40} = \frac{72000-42666.66}{2000} = 14.66666$$

b) Tenemos que:

$$\bar{e}_{yy} = 14.66666 = \int_0^{100-y} t._t p_{yy}.\mu(y+t,y+t)dt = \int_0^{100-y} t._t p_x._t p_y.\left(\mu(y+t)+\mu(y+t)\right)dt =$$

$$= \int_0^{100-y} t.\left(1-\frac{t}{100-y}\right)^2.\left(\frac{2}{100-y-t}\right)dt = \int_0^{100-y} t.\left(\frac{100-y-t}{100-y}\right)^2.\left(\frac{2}{100-y-t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{(100-y)^2}\int_0^{100-y} 2(100-y)t-2t^2dt = \frac{1}{(100-y)^2}.\left[(100-y)t^2-\frac{2t^3}{3}\right]_0^{100-y} =$$

$$\frac{(100-y)^3-\frac{2}{3}(100-y)^3}{(100-y)^2} = (100-y)(1-\frac{2}{3}) = 14.666 \Rightarrow y = 100-3\cdot 14.6666 = 56 \text{ años}$$

4.- Una hombre de 30 años se casa con una mujer de 25. sabemos que el tanto instantáneo de fallecimiento para los hombres es 0.02 para cualquier edad.y para las mujeres 0.015 para cualquier edad (modelo exponencial o 1ª ley de Dormoy) Suponiendo ω=100, calcular la esperanza de vida juntos (26.1058 años)

La esperanza de vida , en común será, en general:

$$\bar{e}_{xy} = \int_0^{\omega-\max(x,y)} t._t p_{xy}.\mu(x+t,y+t)dt = \int_0^{\omega-\max(x,y)} t._t p_x._t p_y.\left(\mu(x+t)+\mu(y+t)\right)dt$$

Al tratarse de dos modelos de Dormoy con α_x= 0.02 y α_y=0.015, tendremos que :

$${}_t p_{xy} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y = e^{-0.02t}.e^{-0.015t}$$

$\mu(x+t) = 0.02$ de modo que :

$\mu(y+t) = 0.015$

$$\bar{e}_{xy} = \int_0^{100-30} t._t p_x._t p_y.\left(\mu(x+t)+\mu(y+t)\right)dt = \int_0^{100-30} 0.035\cdot t\cdot e^{-0.035t}dt$$

Haciendo $\begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ v = -e^{-0.035t} & dv = 0.035\cdot e^{-0.035t} \end{bmatrix}$

$$\overline{e}_{xy} = \int_0^{70} 0.035 \cdot t \cdot e^{-0.035t} dt = \left[-te^{-0.035t}\right]_0^{70} + \int_0^{70} e^{-0.035t} dt = -70e^{-2.45} + \frac{1-e^{-2.45}}{0.035} = 20.06$$

Si en lugar de considerarla la esperanza de vida de esta forma la consideramos con la expresión alternativa:

$$\overline{e}_{xy} = \int_0^{100-30} {}_t p_{xy} .dt = \int_0^{70} {}_t p_x \cdot {}_t p_y dt = \int_0^{70} e^{-0.035t} dt = \frac{1-e^{-2.45}}{0.035} = 26.1058$$

La razón de que no dé el mismo resultado por los dos procedimientos es que estamos falseando el modelo ya que el modelo de Dormoy no tiene un valor "finito" de ω.

Si consideramos que es 100, la variable aleatoria X = edad de fallecimiento, tiene asociada una distribución que NO SUMA 1 en su campo de variación . Y las igualdades integrales no se cumplen.

5.- Si $\mu(x)=1/(100-x)$ para $0 \leq x \leq 100$ calcular:

a)${}_{10}p_{40:50}$

b)${}_{10}p_{40:50}$

c)$e_{40:50}$

d)$e_{\overline{40:50}}$

---

a)

$${}_{10}p_{40:50} = {}_{10}p_{40} \cdot {}_{10}p_{50} = \frac{S(50)}{S(40)} \cdot \frac{S(60)}{S(50)} = \frac{S(60)}{S(40)} = \frac{1-(60/100)}{1-(40/100)}$$

ya que estamos en un modelo de "de Moivre" y por lo tanto

$${}_{10}p_{40:50} = \frac{0.4}{0.6} = 0.66$$

b) ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$

$${}_{10}p_{\overline{40:50}} = 1-({}_{10}q_{\overline{40:50}}) = 1-({}_{10}q_{40} \cdot {}_{10}q_{50}) = 1-(\frac{S(40)-S(50)}{S(40)} \cdot \frac{S(50)-S(60)}{S(50)}) =$$

$$= 1-\left(\frac{100-40-100+50}{100-40} . \frac{100-50-100+60}{100-50}\right) = 1-\frac{100}{3000} = 0.0333$$

c) $e_{40:50}$

$$\overline{e}_{xy} = \int_0^{100-\max(x,y)} t \cdot {}_t p_x \cdot {}_t p_y \cdot \left(\mu(x+t) + \mu(y+t) \right) dt =$$

$$= \int_0^{50} t(1 - t\mu(50))(1 - t\mu(40)) \left(\mu(50+t) + \mu(40+t) \right) dt =$$

$$= \int_0^{50} t(1 - \frac{t}{100-50})(1 - \frac{t}{100-40})) \left(\frac{1}{100-50-t} + \frac{1}{100-40-t} \right) dt =$$

$$= \int_0^{50} t(\frac{50-t}{50})(\frac{60-t}{60}) \left(\frac{1}{50-t} + \frac{1}{60-t} \right) dt = \int_0^{50} t \frac{(50-t)(60-t)}{3000} \left(\frac{60-t+50-t}{(50-t)(60-t)} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{3000} \int_0^{50} t\left(110 - 2t\right) dt = \frac{1}{300} \left[\frac{110t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \right]_0^{50} = \frac{1}{3000}(137500 - 83333.333) = 18.055 \text{ años}$$

d) $e_{\overline{40:50}}$

Como $\overline{e}_{\overline{xy}} = \overline{e}_x + \overline{e}_y - \overline{e}_{xy}$

$$\overline{e}_{xy} = 18.055$$

Y por otra parte como se trata de una población con modelo de “de Moivre

$$\overline{e}_x = \frac{\omega - x}{2} \Rightarrow \overline{e}_{40} = 30 \quad \overline{e}_{50} = 25$$

De modo $\overline{e}_{\overline{xy}} = \overline{e}_x + \overline{e}_y - \overline{e}_{xy}$ =30+25-18.05= 36.95