Estadística Avanzada Para Actuarios
Master en CC Actuariales y Financieras 2024-2025

Alumno:…………………………………………………………………………………………………

1.- En base a la tabla adjunta. Calcula: A) ${}_{10}q_{20}$ de la generación 2015; B) La probabilidad de que una pareja formada en 2013 se disuelva sin extinguirse antes de exactamente 60 años C) La probabilidad de que, en un grupo formado en 2022 de las generaciones de 2010, 2015 Y 2020 sobrevivan exactamente dos al cabo de 50 años. D) Sabiendo que la cantidad de existencia de una persona de 16 años de la generación de 2010 es de T_{16}=775942 años calcular su esperanza de vida(0.25+0.5+1+0,5)

a) ${}_{10}p_{20} = {}_{10}p_{20} = \frac{l_{30}}{l_{20}} = \frac{9956}{9967} = 0,99889$

$$luego\ {}_{10}q_{20} = 1 - 0,99889 = 0,0011$$

b) pareja de la generación de 2010 ambos (otra manera no podríamos)

$${}_{60}p_{\underset{3,3}{[1]}} = {}_{60}p_3 \cdot {}_{60}q_3 + {}_{60}q_3 \cdot {}_{60}p_3 = \frac{l_{63}^{2010}}{l_3^{2010}} \cdot \left(1 - \frac{l_{63}^{2010}}{l_3^{2010}}\right) + \left(1 - \frac{l_{63}^{2010}}{l_6^{2010}}\right) \cdot \frac{l_{63}^{2010}}{l_6^{2010}} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{9698}{9972} \cdot \left(1 - \frac{9698}{9972}\right)\right) = 2 \cdot (0,972523 \cdot 0,027476) = 2 \cdot (0,02672) = 0,05344391$$

c)

$${}_{50}p_{\underset{12,7,2}{[2]}} = {}_{50}p_{12} \cdot {}_{50}p_7 \cdot {}_{50}q_2 + {}_{50}p_{12} \cdot {}_{50}q_7 \cdot {}_{50}p_2 + {}_{5}q_{12} \cdot {}_{50}p_7 \cdot {}_{50}p_2 =$$

$$= \frac{l_{62}^{2010}}{l_{12}^{2010}} \cdot \frac{l_{57}^{2015}}{l_7^{2015}} \cdot \left(1 - \frac{l_{52}^{2020}}{l_2^{2020}}\right) + \frac{l_{62}^{2010}}{l_{12}^{2010}} \cdot \left(1 - \frac{l_{57}^{2015}}{l_7^{2005}}\right) \cdot \frac{l_{52}^{2020}}{l_2^{2020}} + \left(1 - \frac{l_{62}^{2010}}{l_{12}^{2010}}\right) \cdot \frac{l_{57}^{2015}}{l_7^{2005}} \cdot \frac{l_{52}^{2020}}{l_2^{2020}} =$$

$$\frac{l_{62}^{2010}}{l_{12}^{2010}} = \frac{9721}{9966} = 0,97541 \quad \frac{l_{57}^{2015}}{l_7^{2015}} = \frac{9779}{9977} = 0,98015 \quad \frac{l_{52}^{2020}}{l_2^{2020}} = \frac{9873}{9984} = 0,98888$$

$$= 0,97541 \cdot 0,98015 \cdot 0,01111 + 0,97541 \cdot 0,01984 \cdot 0,98888 +$$
$$+ 0,02458 \cdot 0,98015 \cdot 0,988888 =$$
$$= 0,010629 + 0,0191425 + 0,0238278 = 0,053599$$

d) $e_{16}^0 = \frac{T_{16}}{l_{16}} = \frac{775942}{9962} = 77,89\ años$

2.- Para un joven(A) de 20 años de la generación de 2010 se suscribe un seguro de manera que sus allegados cobrarán 500.000 euros si fallece antes de 40 años Si partimos de unas tablas recargadas al 4 %. de riesgo y un l_o= 10000 **A)** ¿Qué prima de riesgo única pagará por el seguro suscrito, si se supone un tipo de interés teórico del 2 %? **B)** Considerada una cartera compuesta por 1000 personas similares a *A* , calcular el riesgo, medido en probabilidad, de que la compañía no pueda hacer frente a los compromisos asumidos con los recursos captados a partir de las primas de riesgo que se obtienen en el apartado A sin considerar el tipo de interés (1,5+ 2)

a) La prima sin considerar el tipo de interés sería : $\pi = 500000._{40}p_{20}^{-} = 500000.(1-\frac{l_{60}^{-}}{l_{20}^{-}})$

$$l_{60}^{-} = l_0.p_{60} - z_\alpha\sqrt{l_0 p_{60}(1-p_{60})} = 10000\cdot 0.9763\text{-}1.751\sqrt{10000\cdot 0.9763\cdot 0,0237} = 9736,36$$

$$l_{20}^{-} = l_0.p_{20} - z_\alpha\sqrt{l_0 p_{20}(1-p_{20})} = 10000\cdot 0.9956 - 1.751\sqrt{10000\cdot 0.9956\cdot 0,0044} = 9944,41$$

$$\pi = 500000._{40}q_{20}^{-} = 500000.(1-\frac{l_{60}^{-}}{l_{20}^{-}}) = 500000.(1-\frac{9736,36}{9944,41}) = 500000\cdot 0,0209 = 10460,43$$

Y con un interés del 2 % anual :

$$\Pi = \frac{\pi}{(1+0.02)^{40}} = \frac{10460,43}{1.02^{40}} = 4737,43\ euros$$

B)
Por lo tanto los recursos de la compañía serán R=1000.π=4.737.430 €
Sin considerar tipo de interés R=1000x10460,43=10.460.434
Los compromisos contraídos serán aleatorios :

C= 500000xFallecidos

F→B(1000,0.01938) ya que $_{40}q_{20} = 1-\frac{l_{60}}{l_{20}} = 1-\frac{9763}{9956} = 1-0.9806 = 0,01938$

Que por Moivre será F = N[19,385; 4,3599]
Media 1000·0,01938 DT=Raíz (1000·0,9806·0,01938)

Y C seguirá también una normal : C→N[500000x19,385; σ=500000x4,3599] esto es:

C→N[9.504.752,81 ; σ=2.179.994,59] así

P(C>R) =P(Z> (10.460.434 - 9.504.752,81) / 2.179.994,59)=P(Z>0,4383)=1-F(0,4383)=
=1-0,669= 0.331 Un riesgo del 33%

3.-Sabiendo que $l_x = 10000\left(1-\frac{x}{110}\right)$ (para x≤110) **a)** obtener la probabilidad de que una persona de 50 años sobreviva 10 años más. **b)** esperanza de vida de una persona de 50 años.(0,25+1)

a) $_{10}p_{50} = \frac{l_{60}}{l_{50}} = \frac{10000\left(1-\frac{60}{110}\right)}{10000\left(1-\frac{50}{110}\right)} = \frac{1-0,5454}{1-0,4545} = 0,833$

b)

$$\bar{e}_x = \bar{e}_{50} = \int_0^{110-50} \cdot\ {}_tp_x dt = \int_0^{110-50} 1-\frac{t}{60}\cdot dt = \left[t-\frac{t^2}{60\cdot 2}\right]_0^{60} = 30$$

$$ {}_tp_x = \ {}_tp_{50} = \frac{l_{50+t}}{l_{50}} == \frac{110-50-t}{110-50} = 1 - \frac{t}{60} $$

también:

$$ \mu_x = -\frac{\grave{l}(x)}{l(x)} = -\frac{-1}{110-x} = \frac{1}{110-x} \Rightarrow \mu_{50} = \frac{1}{60} $$

$$ \mu_{50+t} = \frac{1}{110-(50+t)} = \frac{1}{60-t} $$

$$ \bar{e}_x = \bar{e}_{50} = \int_0^{w-x} t \cdot \ {}_tp_x \cdot \mu(x+t)dt = \int_0^{w-x} t \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \frac{1}{60-t} dt $$
$$ = \frac{1}{60}\int_0^{w-x} t \cdot (60-t) \cdot \frac{1}{60-t} dt = \frac{1}{60}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{60} = 30 $$

4.- Calcular con $\mu(x) = \frac{1}{100-x}\ para\ x \in [0{,}100]$ la probabilidad de que una pareja de la misma cohorte de 30 y 40 años el mayor fallezca antes de 10 años mientras que el otro sobrevive

conocemos que

$$ {}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t}\mu(y)dy} = e^{-\int_x^{x+t}\frac{1}{100-y}dy} = \frac{100-x-t}{100-x} $$

$$ {}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t}\mu(y)dy} = e^{-\int_x^{x+t}\frac{1}{100-y}dy} = \frac{100-x-t}{100-x} $$

$$ {}_{10}q_{40} \cdot {}_{10}p_{30} = \left(1 - \frac{100-40-10}{100-40}\right) \cdot \left(\frac{100-30-10}{100-30}\right) = (1 - \frac{50}{60}) \cdot \left(\frac{60}{70}\right) = \frac{600}{4200} $$
$$ = 0{,}142857 $$

5.-En términos generales se ha estudiado que un siniestro supone para nuestra aseguradora una cuantía monetaria dada por una función de distribución lgN(μ=12, σ=4) (en euros) . a) Sabiendo que un siniestro ha sido superior a 18000 euros ¿cuál es la probabilidad de que su cuantía esté comprendida entre 20000 y 28000? b) Calcular la probabilidad de que antes del tercer siniestro se haya producido el primero con una cuantía entre 20000 y 28000 euros. (0.5+0,5)

a) ¿$P(20000 \le x \le 28000)$ sabiendo que es superior a 18000 será:

$$P\left({}^{20000 < x < 28000}\!/_{x > 18000}\right) = \frac{P(20000 < x < 28000)}{P(x > 18000)} = \frac{0{,}03}{0{,}709} = 0{,}04$$

tipificando

$$P\left(\frac{\ln 20000 - 12}{4} \le t \le \frac{\ln 28000 - 12}{4}\right) = P(-0{,}524 \le t \le -0{,}44) = F\left(0{,}524\right) - F\left(0{,}44\right) = 0{,}03$$

$$P\left(t > \frac{\ln 18000 - 12}{4}\right) = P(t > -0{,}55) = F\left(0{,}55\right) = 0{,}709$$

b) Y = número de siniestros hasta el primero de cuantía 20000-28000

$$Y \to G(0{,}03 = p)$$

$$P(y \le 2) = función\ distri\ geometrica = F(2) = 1 - q^x = 1 - 0{,}97^2 = 1 - 0{,}9409 = 0{,}0591$$

6.-El número de personas (en miles) que cogerán la gripe este año se presupone una distribución logística de parámetros media= 30 y escala 10.
Calcular la probabilidad de que este año haya más de 35000 afectados. (0,5)

$$X \to Log(\alpha, \beta) = Log(30,10)$$

$$P(x > 35) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\alpha}{b}}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{35-30}{10}}} = \frac{1}{1 + e^{-0{,}5}} = 1 - 0{,}6224 = 0{,}3776$$