TEMA 4: Variabilidad y mortalidad: La mortalidad como fenómeno aleatorio.

- Introducción.
- Los elementos de la tabla de mortalidad como variables aleatorias.
- Construcción de la tabla de mortalidad con recargos de seguridad.
- Cálculo del riesgo probabilístico asociado a una cartera.

Introducción.

El cálculo de las primas de cualquier seguro de vida y/o supervivencia está basado fundamentalmente en las probabilidades de fallecimiento y muerte que los individuos tienen a cada edad. Esa información viene recogida en las tablas de mortalidad donde aparecen, entre otras cosas el número de supervivientes l_x (o de fallecidos d_x) que alcanzan (o perecen a) determinada edad procedentes de un colectivo inicial de tamaño prefijado. Estas tablas se elaboran a partir de las informaciones de censos de población y listas de fallecidos de colectivos generales (*población general*) o de los datos de las compañías aseguradoras en poblaciones de asegurados (*población de riesgo*). Una vez seleccionada la muestra, las relaciones entre el número de expuestos al riesgo (de fallecer) y número de fallecidos (a cada edad) permite establecer las estimaciones iniciales de probabilidades de fallecimiento a cada edad, q_x , y también de sus complementarias (probabilidad de supervivencia) $p_x=1-q_x$ .Esas probabilidades tras un proceso de *suavizado*, *ajuste* y *graduación* serán las empleadas para la elaboración de la tabla para ello se parte de un tamaño de la población inicial l_0, ficticio (en general 10.000 o 100.000 individuos) se van aplicando las probabilidades para obtener los distintos elementos de la tabla.
Sin embargo hay que tener en cuenta que los elementos de la tabla así obtenidos no serán más que meras **estimaciones**. De hecho cada l_x será el promedio de la cantidad aleatoria de supervivientes el tiempo x : $\mathcal{L}_x$ .Las probabilidades derivadas (temporales diferidas , mixtas etc), sólo tendrán validez o para intervalos temporales muy amplios o para poblaciones grandes y siempre y cuando se pudiese mantener el supuesto de estacionariedad del proceso de muerte durante el periodo considerado.

Esto supone, en la práctica, que con primas de riesgo calculadas sobre estas estimaciones la compañía podrá hacer frente a sus compromisos sólo con una probabilidad del 50 %, bajo el supuesto de normalidad que presupone la aplicación del TCL (tamaño de la cartera grande). Es por esto que las compañías suelen recargar estadísticamente sus primas haciendo uso de tablas recargadas. Con ello pretenden minimizar el riesgo de un exceso de mortalidad en una cartera de seguros de fallecimiento o de un exceso de vida en una cartera de seguros de supervivencia. A partir de la distribución de $\mathcal{L}_x$ se calcula un valor mínimo de sujetos l_x^- que alcanzará con “cierta garantía” esa edad (de aplicación en carteras de seguros por fallecimiento), y un número máximo de sujetos l_x^+, que con cierta garantía no será superado por los supervivientes (de aplicación en las carteras de seguros de supervivencia)

Los elementos de la tabla de mortalidad como variables aleatorias.

Si la tabla de mortalidad consigna fundamentalmente el número de supervivientes del grupo inicial y el número de defunciones de cada año l_x y d_x, podemos considerar, según lo comentado arriba que ambas cantidades no son más que estimaciones de los auténticos valores de las cantidades aleatorias $\mathcal{L}_x$ y $\boldsymbol{d}_x$.

Podemos hacer la consideración de que a partir de una población inicial L, cada uno de los individuos puede fallecer o no en el trascurso del tiempo x con una probabilidad p de supervivencia hasta x que en función de las hipótesis básicas del modelo biométrico es la misma para todos. Obviamente la distribución para cada x de las variables $\mathcal{L}_x$ será una binomial de parámetros L y p.

En realidad:

$$\mathcal{L}_x \to B(l_0, {}_x p_0)$$

Las variables $\boldsymbol{d}_x$ vendrán dadas por las diferencias entre cada par de variables $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{L}_{x-1}$.Su distribución sería más complicada de obtener, ya que al ir variando los segundos parámetros (p) de las distribuciones de las $\mathcal{L}_x$ no podríamos aplicar la aditividad de la distribución binomial.

En cualquier caso actuando sobre la distribución de las $\mathcal{L}_x$ y contando con que el valor de l_0 será alto podremos aplicar el teorema de Moivre y aproximar su distribución por la normal

$$\mathcal{L}_x \to\to N\left(l_0 \cdot {}_x p_0;; \sigma = \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right)$$

Ello implicará que para un valor de probabilidad (1-α) , podemos obtener un intervalo en el que estará comprendida esta variable con esa probabilidad:

$$\boxed{P\left(l_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)} < \mathcal{L}_x < l_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right) = 1 - \alpha}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor tabulado de una normal tipificada que deja por encima de él una probabilidad de α/2.

Lo habitual será, sin embargo, que sólo estemos interesados en "curarnos en salud" por uno de los dos lados por lo que trabajaremos, no con intervalos de probabilidad (1-α), si no con una cota inferior (para seguros de vida) o superior (para seguros de supervivencia; esto es que para un valor de probabilidad (1-α) , (que acabará siendo el **nivel de garantía** del **recargo de seguridad**) tendremos que:

$$\boxed{P\left(\mathcal{L}_x > l_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right) = 1 - \alpha}$$

o

$$\boxed{P\left(\mathcal{L}_x < l_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right) = 1 - \alpha}$$

Donde z_α es el valor tabulado de una normal tipificada que deja por encima de él una probabilidad de α.

Como ya se ha insinuado, será a partir de éste u otros resultados similares de donde se partirá para diseñar los distintos procedimientos de recargo con **garantía** predeterminada (1-α).

Construcción de la tabla de mortalidad con recargos de seguridad.

La construcción de la tabla de mortalidad recargada se va a basar en la re-construcción de los valores de l_x al alza o a la baja, partiendo del intervalo de probabilidad de la garantía predeterminada (1-α) y teniendo en cuenta que la distribución de la variable aleatoria "supervivientes" $\mathcal{L}_x$ sigue una distribución binomial que puede aproximarse a un normal.

Digamos que el procedimiento general consistirá en ir obteniendo $l_1^+, l_2^+, l_3^+ \ldots + l_x^+, \ldots l_{\omega-1}^+$ ($l_1^-, l_2^-, l_3^-, \ldots, l_x^-, \ldots l_{\omega-1}^-$), según el caso a partir de los extremos superiores (inferiores) de los intervalos de probabilidad 1-α.

Sin embargo, sentado el hecho de que la distribución de los supervivientes es una binomial de parámetros: *número inicial de supervivientes*, y *probabilidad de supervivencia*, dependiendo de cómo vayamos eligiendo estos dos parámetros tendremos distintas estrategias de construcción de la tabla recargada:

Así podremos considerar:

1) $\mathcal{L}_x \to B(l_0, {}_x p_0)$ o

2) $\mathcal{L}_x \to B(l_{x-1}, p_{x-1})$

Pero en la estrategia 2 podríamos considerar que para ir generando los sucesivos valores recargados, para x+1, x+2, etc.(a partir en realidad del primero) nos interesaría utilizar como primer parámetro de la distribución el valor (ya) recargado obtenido en el periodo anterior digamos que una estrategia nueva 3) sería:

3) $\mathcal{L}_{x+1} \to B(l_x^+, p_{x-1})$ o bien $\mathcal{L}_{x+1} \to B(l_x^-, p_{x-1})$ según el caso.

Y aún,

4) podríamos no utilizar la distribución de $\mathcal{L}_x$, sino basarnos en que los valores de los sucesivos l_x se obtienen multiplicando el valor anterior por la probabilidad de supervivencia anterior y tomar para su obtención de esta forma los valores recargados de las probabilidades de supervivencia (máximos o mínimo, según el caso) es decir:

$$l_x^* = l_{x-1}^* p_{x-1}^* = l_{x-2}^* p_{x-2}^* p_{x-1}^* = \ldots = l_0 p_0^* p_1^* p_2^* \ldots p_{x-1}^*$$

donde * es + o $-$, según el caso

La primera de las estrategias de construcción es la recomendada por la UNESPA y es la que habitualmente seguiremos. Esto es consideraremos:

$\mathcal{L}_1 \to B(l_0, p_0)$

$\mathcal{L}_2 \to B(l_0, p_0 p_1)$

$\mathcal{L}_3 \to B(l_0, p_0 p_1 p_2)$

....

$\mathcal{L}_x \to B(l_0, p_0 p_1 p_2 \ldots p_{x-1})$

....

Y , a partir de aquí, y tras la aproximación normal consideraríamos como valores recargados el extremo (superior o inferior, según el caso) del intervalo de probabilidad.

En definitiva:

$$\boxed{\begin{aligned} l_x^- &= \max\left\{0;\ l_0 \cdot {}_x p_0 - z_\alpha \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right\} \\ l_x^+ &= \min\left\{l_0;\ l_0 \cdot {}_x p_0 + z_\alpha \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right\} \end{aligned}}$$

Ejercicio práctico:

Supongamos que una persona de 30 de la generación de 1977 (tabla adjunta) contrata un seguro que cubre con 30.000€ el riesgo de fallecimiento antes de los 70 años o que le reintegrará 25.000€ en su 70 cumpleaños. Suponiendo un tipo de interés nulo y utilizando una tablas recargadas al 3% de riesgo ¿qué prima de riesgo pagará por este seguro?.

Llamando respectivamente: q^- y p^+ a las probabilidades obtenidas a partir de los valore recargados de l_x por defecto y por exceso tendremos que la prima que tendrá que pagar debiendo igualar la compensación por fallecer por su probabilidad (recargada) más la probabilidad de sobrevivir por su probabilidad (recargada) será:

$$\pi = 30000.{}_{40}q_{30}^- + 25000\,{}_{40}p_{30}^+ = 30000.\left(1 - \frac{l_{70}^-}{l_{30}^-}\right) + 25000\frac{l_{70}^+}{l_{30}^+}$$

Como: $$\boxed{\begin{aligned} l_x^- &= \max\left\{0;\ l_0 \cdot {}_x p_0 - z_\alpha \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right\} \\ l_x^+ &= \min\left\{l_0;\ l_0 \cdot {}_x p_0 + z_\alpha \sqrt{l_0 \cdot {}_x p_0 (1 - {}_x p_0)}\right\} \end{aligned}}$$

Y considerando la tabla:

Tabla de Mortalidad Generación 1977

Edad	ℓ_x	Edad	ℓ_x	Edad	ℓ_x	Edad	ℓ_x
0	100000	25	98661	50	97869	75	93862
1	99193	26	98639	51	97809	76	93443
2	99130	27	98615	52	97741	77	92974
3	99085	28	98590	53	97673	78	92449
4	99056	29	98564	54	97594	79	91864
5	99029	30	98537	55	97513	80	91213
6	99008	31	98510	56	97427	81	90475
7	98989	32	98484	57	97340	82	89606
8	98972	33	98460	58	97245	83	88611
9	98959	34	98437	59	97143	84	87449
10	98948	35	98413	60	97035	85	86076
11	98935	36	98385	61	96917	86	84484
12	98922	37	98357	62	96792	87	82673
13	98908	38	98329	63	96657	88	80594
14	98892	39	98301	64	96517	89	78244
15	98877	40	98273	65	96367	90	75576
16	98860	41	98241	66	96203	91	72551
17	98841	42	98210	67	96024	92	69370
18	98820	43	98176	68	95832	93	65689
19	98798	44	98139	69	95625	94	61476
20	98774	45	98101	70	95397	95	56669
21	98751	46	98058	71	95150	96	51276
22	98728	47	98016	72	94876	97	45343
23	98706	48	97970	73	94575	98	38969
24	98684	49	97924	74	94238	...	...

Tendremos que :

$$l_{30}^{-}=l_{0}\cdot{}_{30}p_{0}-z_{\alpha}\sqrt{l_{0}\cdot{}_{30}p_{0}(1-{}_{30}p_{0})}=$$
$$=100000.\frac{98537}{100000}-1.88\sqrt{100000.\frac{98537}{100000}\left(1-\frac{98537}{100000}\right)}=98465.62$$

$$l_{70}^{-}=l_{0}\cdot{}_{70}p_{0}-z_{\alpha}\sqrt{l_{0}\cdot{}_{70}p_{0}(1-{}_{70}p_{0})}=$$
$$=100000.\frac{95397}{100000}-1.88\sqrt{100000.\frac{95397}{100000}\left(1-\frac{95397}{100000}\right)}=95272.42$$

$$l_{30}^{+}=l_{0}\cdot{}_{30}p_{0}+z_{\alpha}\sqrt{l_{0}\cdot{}_{30}p_{0}(1-{}_{30}p_{0})}=$$
$$=100000.\frac{98537}{100000}+1.88\sqrt{100000.\frac{98537}{100000}\left(1-\frac{98537}{100000}\right)}=98608.41$$

$$l_{70}^{+}=l_{0}\cdot{}_{70}p_{0}+z_{\alpha}\sqrt{l_{0}\cdot{}_{70}p_{0}(1-{}_{70}p_{0})}=$$
$$=100000.\frac{95397}{100000}+1.88\sqrt{100000.\frac{95397}{100000}\left(1-\frac{95397}{100000}\right)}=95521.63$$

Resultando que la prima de riesgo será:

$$\pi=30000.\left(1-\frac{l_{70}^{-}}{l_{30}^{-}}\right)+25000\frac{l_{70}^{+}}{l_{30}^{+}}=30000.\left(1-\frac{95272.42}{98465.62}\right)+25000\frac{95521.63}{98608.41}=$$
$$972.89+24217.415=\boxed{\pi=25190.305€}$$

Cálculo del riesgo asociado a una cartera

Suponiendo toda la información disponible acurada, determinar las primas de cada contrato de seguro según la información biométrica de las tablas de mortalidad, actualizando eventualmente las primas al tipo de interés, no nos garantiza poder hacer frente a cada compromiso individualmente. Se trabaja en términos probabilísticos y por lo tanto el equilibrio entre ingresos y pagos posibles sólo cabe esperar que ocurra de hecho si se da un gran número de casos iguales. Cada caso individualmente considerado supondrá de hecho, o bien un beneficio o bien una pérdida para la empresa aseguradora.

Por ello interesa, no sólo, determinar las primas de cada contrato individual según una buena información biométrica, eventualmente recargada, también convendrá calcular el **riesgo asociado a una cartera** de muchos seguros. En definitiva se tratará de determinar la probabilidad de que la suma de todos los compromisos a los que tiene que hacer frente la compañía, C, supere los recursos, R, que supongan la suma de todas las primas que percibirá, o una parte de la misma: es decir P(C>R). Tanto C como R serán dos variables aleatorias complejas que dependerán en cada contrato de los compromisos y primas individuales y de las probabilidades de fallecimiento y supervivencia de cada caso.

Veamos un ejemplo, ciertamente muy simplificado , que ilustre la situación:

Con una cartera compuesta de 600 individuos como el del ejercicio anterior que contratan ese mismo seguro, ¿cuál es el riesgo asociado si la compañía destina el 99 % de lo recaudado con las primas de riesgo a hacer frente a los compromisos?

Queremos determinar P(C>R)

R es el 99% de la totalidad de las primas es decir:
R=0.99×600×π=0.99×600×25190.305=14963041.17 €
y C= F×30000+S×25000 donde F es el número de fallecidos antes de los 70 años de los 600 y S es el número de supervivientes de esos 600. Obviamente F y S no son independientes si no que F= 600-S de forma que :
C=30000(600-S)+25000.S=18000000-5000S

La variable aleatoria S será tal que

$$S \to B(600, {}_{40}p_{30}) \equiv B(600, \frac{l_{70}}{l_{30}}) \equiv B(600, \frac{95397}{98537}) \equiv B(600, 0.9681)$$

Que puede aproximarse por la normal de forma que :

$$S \to N(\mu = 600 \cdot 0.9681; \sigma = \sqrt{600 \cdot 0.9681 \cdot 0.0319})$$
$$S \to N(\mu = 580.86; \sigma = 4.3046)$$

Y , por lo tanto, por la linealidad de la distribución normal, la variable C será:

$$C \to N\left(\mu = 18000000 - 5000 \cdot 580.86;; \sigma = 5000 \cdot 4.3046\right)$$
$$C \to N(15095700; 21523)$$

P(C>R)=P(C > 14963041.17)

$$P(C \ > \ 14963041.17\ ) = \mathrm{P}(\mathrm{z} > \frac{14963041.17 - 15095700}{21523}) = P(z > -6.16) = 1$$

Es decir el riesgo que corre la compañía de no poder hacer frente a sus compromisos es del 100 % : seguro que será insolvente

Incluso dedicando el 100% de lo recaudado en primas
R=600×π=600×25190.305=15114183€
estaríamos en una situación de riesgo de:

$$P(C > R) = P(C > 15114183) = \mathrm{P}(\mathrm{z} > \frac{15114183 - 15095700}{21523}) = P(z > 0.86) = 0.195$$

un aún bastante elevado 19,5 %.

Por lo tanto vemos en este ejemplo, que aún recargando las tablas para garantizar el pago de la indemnización de un solo asegurado, no tenemos demasiadas garantías de poder hacer frente a 600 clientes en esas misma condiciones.

Obviamente también puede plantearse el problema, al revés, y en la práctica actuarial será mucho más habitual: a partir de los datos de la cartera y haciendo algunos supuestos adicionales relativos a los tipos de interés, la política de la compañía y/o la legislación nos señalarán un nivel de riesgo de cartera y tendremos que determinar el valor de los recursos necesarios para "cubrir" ese riesgo y a partir de ese valor: constituir las reservas necesarias.

Por ejemplo : supongamos una cartera constituida por 300 clientes de 20 años (de la generación del 77) que tienen derecho a un seguro de vida si fallecen antes de los 65 años de 300 mil euros y si sobreviven a esa edad cobrarán 200 mil euros.

¿Qué cantidad deberá dedicar la compañía para cubrir sus compromisos con un riesgo inferior o igual al 1 %?

¿Cuánto debería cobrarse en concepto de la prima individual (considerando un pago único)? (No consideramos intereses)

C=200000×S+300000×F, siendo S y F el número de supervivientes y fallecidos a los 65 años de los 300 clientes : Obviamente F=20-S y S →B(300,${}_{45}p_{20}$), que podremos aproximar por la normal (T. Moivre).

$${}_{45}p_{20} = \frac{l_{65}}{l_{20}} = \frac{96367}{98774} = 0.975631$$

De modo que :

$$S \to N(\mu = 300 \cdot 0.975631;;\sigma = \sqrt{300 \cdot 0.975631 \cdot (1-0.975631)})$$

$$S \to N(292.6894;;\sigma = 2.67068)$$

Y por lo tanto ,como

C=200000×S+300000×F=200000S+300000(300-S)=90000000-100000S

Tendremos que :

$$C \to N\left(90000000\text{-}(100000 \cdot 292.6894);;\sigma\text{=}100000 \cdot 2.67068\right)$$

$$C \to N(60731060;;\sigma = 267068)$$

Como queremos determinar el valor de R tal que garantice que :

P(C < R)=0.99 (=1-0.01) ,

$$R = 60731060 + z_{0.01} \cdot 267068 = 60731060 + 2.326 \cdot 267068 = 61352260.17$$

Como son 300 clientes , al menos debería cobrárseles (en un pago único):
61352260.17 / 300 =204507,53€