

Modelo de Moivre — Desarrollo simplificado

Función de cohorte, $F(x)$, $T(x)$, tanto instantáneo y probabilidades de fallecimiento y supervivencia

1. Función de cohorte

Partimos de la función de supervivencia (número de supervivientes) del modelo de Moivre:

$$l(x) = 10\,000 \cdot (1 - x/100), \quad 0 \leq x \leq 100$$

donde:

- $l(0) = 10\,000$ es el **radix** (población inicial)
- $\omega = 100$ es la **edad límite**

Interpretación: de cada 10 000 recién nacidos, $l(x)$ llega vivo a la edad x . El decrecimiento es **lineal** con la edad.

2. Función de distribución $F(x)$ y expresión de $T(x)$

2.1 Función de distribución

La probabilidad de fallecer antes de la edad x es:

$$F(x) = 1 - \frac{l(x)}{l(0)} = 1 - (1 - x/100) = \frac{x}{100}$$

$$F(x) = x/100, \quad 0 \leq x \leq 100$$

2.2 Expresión de la vida residual $T(x)$

Para un individuo vivo a la edad x , la vida residual es:

$$T(x) = X - x \mid X > x$$

Su distribución es uniforme en $[0, 100 - x]$, de modo que:

$$T(x) \sim U(0, 100 - x)$$

$$E[T(x)] = (100 - x)/2, \quad \text{Var}[T(x)] = (100 - x)^2/12$$

3. Tanto instantáneo de mortalidad $\mu(x)$

La fuerza de mortalidad a la edad x es:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{1/100}{1 - x/100} = \frac{1}{100 - x}$$

$$\mu(x) = 1/(100 - x), \quad 0 \leq x < 100$$

Propiedades:

- Es **creciente** con la edad.
- Tiende a **infinito** cuando $x \rightarrow 100$.
- $\mu(0) = 1/100 = 0,01$.

4. Probabilidades temporales de fallecimiento ${}_tq_x$

Probabilidad de fallecer **dentro de t años**, estando vivo a la edad x :

$${}_tq_x = \frac{t}{100 - x}$$

Ejemplo — ${}_{10}q_{40}$

Probabilidad de que un individuo de 40 años fallezca antes de los 50:

$${}_{10}q_{40} = 10/(100 - 40) = 10/60 = 0,1667 \text{ (16,67 \%)}$$

Fallecimiento en un año concreto

$${}_1q_{x+t} = \frac{1}{100 - x - t}$$

Ejemplo — ${}_1q_{50}$

Probabilidad de fallecer entre los 50 y los 51, estando vivo a los 50:

$${}_1q_{50} = 1/(100 - 50) = 1/50 = 0,02 \text{ (2 \%)}$$

5. Probabilidades de supervivencia temporal ${}_tp_x$

Probabilidad de sobrevivir **t años más**, estando vivo a la edad x :

$${}_tp_x = \frac{100 - x - t}{100 - x} = 1 - \frac{t}{100 - x}$$

Ejemplo — ${}_{10}p_{40}$

Probabilidad de que un individuo de 40 años sobreviva hasta los 50:

$${}_{10}p_{40} = (100 - 40 - 10)/(100 - 40) = 50/60 = 0,8333 \text{ (83,33 \%)}$$

Comprobación: ${}_{10}p_{40} + {}_{10}q_{40} = 0,8333 + 0,1667 = 1 \checkmark$

6. Probabilidades diferidas

6.1 Supervivencia diferida

Probabilidad de sobrevivir $t+u$ años en total:

$${}_{t+u}p_x = \frac{100 - x - t - u}{100 - x}$$

6.2 Fallecimiento diferido ${}_t|q_x$

Probabilidad de sobrevivir t años y fallecer después:

$${}_t|q_x = {}_tp_x = \frac{100 - x - t}{100 - x}$$

Ejemplo — ${}_{10}|q_{40}$

Probabilidad de vivir hasta los 50 y fallecer después:

$${}_{10}|q_{40} = 50/60 = 0,8333 \text{ (83,33 \%)}$$

7. Probabilidades diferidas y temporales ${}_t|uq_x$

Probabilidad de sobrevivir t años y fallecer en los u años siguientes:

$${}_t|uq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = \frac{u}{100 - x}$$

$${}_t|uq_x = u/(100 - x)$$

Observación: en Moivre, la probabilidad de fallecer en un intervalo de u años **no depende del tiempo diferido t** , solo de la longitud u .

Ejemplo — ${}_{10}|5q_{40}$

Vivir hasta 50 y fallecer entre 50 y 55:

$${}_{10}|5q_{40} = 5/(100 - 40) = 5/60 = 0,0833 \text{ (8,33 \%)}$$

Ejemplo — ${}_{20}|10q_{30}$

Vivir hasta 50 y fallecer entre 50 y 60:

$${}_{20}|10q_{30} = 10/(100 - 30) = 10/70 = 0,1429 \text{ (14,29 \%)}$$

7.1 Fallecimiento en un año concreto diferido

$${}_t|1q_x = \frac{1}{100 - x}$$

Ejemplo — ${}_{10}|1q_{40}$

Vivir hasta 50 y morir entre 50 y 51:

$${}_{10}|1q_{40} = 1/60 = 0,0167 \text{ (1,67 \%)}$$

8. Resumen de fórmulas

Concepto	Fórmula	Moivre ($\omega = 100$)
Cohorte	$l(x)$	$10\,000(1 - x/100)$
Distribución	$F(x)$	$x/100$
Densidad	$f(x)$	$1/100$
Tanto instantáneo	$\mu(x)$	$1/(100 - x)$
Supervivencia temporal	${}_tP_x$	$(100 - x - t)/(100 - x)$
Fallecimiento temporal	${}_tq_x$	$t/(100 - x)$
Fallecimiento diferido-temporal	${}_t uq_x$	$u/(100 - x)$
Fallecimiento en año t	${}_t 1q_x$	$1/(100 - x)$
Vida residual	$T(x)$	$U(0, 100 - x)$

9. Ejemplos numéricos con $x = 40$

Individuo de **40 años**: $100 - x = 60$.

Probabilidad	Expresión	Valor	Interpretación
${}_{10}P_{40}$	$(60 - 10)/60$	0,8333	Sobrevivir 10 años
${}_{10}q_{40}$	$10/60$	0,1667	Fallecer antes de los 50
${}_{10} 5q_{40}$	$5/60$	0,0833	Vivir hasta 50 y morir entre 50 y 55
${}_{20} 10q_{40}$	$10/60$	0,1667	Vivir hasta 60 y morir entre 60 y 70
${}_1q_{50}$	$1/50$	0,0200	Morir entre 50 y 51 (dado vivo a 50)
$\mu(40)$	$1/60$	0,0167	Tanto instantáneo a los 40

Probabilidad	Expresión	Valor	Interpretación
$\mu(70)$	1/30	0,0333	Tanto instantáneo a los 70