Primera Ley de Makeham

Este modelo supone que el tanto instantáneo de fallecimiento obedece a la expresión:

$$\mu(x) = A + BC^x$$

En donde el segundo sumando coincide con la ley de Gompertz y supondría un factor de resistencia a la muerte decreciente con la edad y vendría a dar cuenta de las muertes por causas naturales, mientras que el primer sumando supondría un factor constante con la edad y vendría a registrar la mortalidad accidental.

A > 0, B > 0, 0 < C <1

La función de supervivientes $l(x)$ la obtendremos integrando la relación entre $l(x)$ y $\mu(x)$:

$$-\frac{l'(x)}{l(x)} = \mu(x) = A + BC^x \quad \Rightarrow \ln\left(l(x)\right) = -(Ax + \frac{BC^x}{\ln C} + D) \quad \Rightarrow$$

$$l(x) = e^{-(Ax + \frac{BC^x}{\ln C} + D)} \Rightarrow \boxed{l(x) = KS^x g^{C^x}}$$

donde:

$K = e^{-D}$ constante positiva

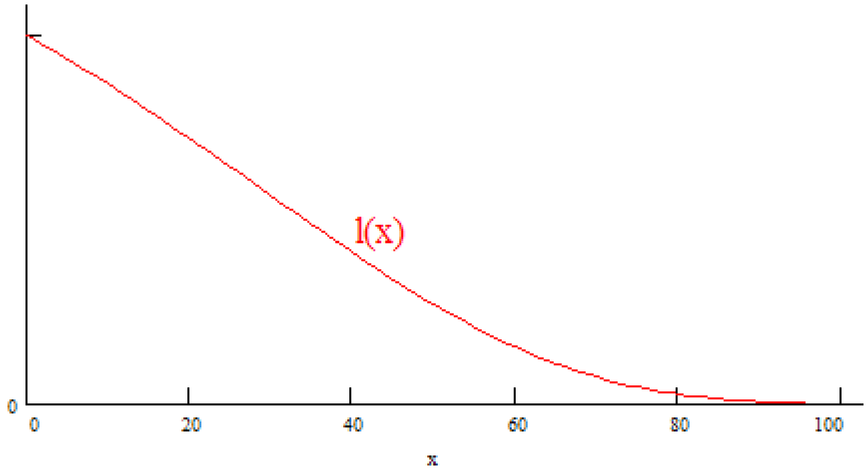
$g = e^{-\frac{BC}{\ln C}}$ constante menor que 1 ya que B/lnC es positivo

$S = e^{-A}$ constante menor que la unidad.

Teniendo en cuenta de $l(0) = l_0$: $l_0 = Kg$ y , por tanto: K= (l_0 / g) y nos quedará:

$$l(x) = KS^x g^{C^x} = \frac{l_0}{g} S^x g^{C^x} = \boxed{l(x) = l_0 S^x g^{C^x - 1}}$$

En este gráfico tenemos la función l(x) con C=1.03 ,g=0.7 y S=0.998:



Volviendo a la relación entre $l(x)$ y $\mu(x)$ podemos ver que:

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{l_0 S^x g^{C^x-1}\cdot\left(\ln S + \ln g \cdot \ln C \cdot C^x\right)}{l_0 S^x g^{C^x-1}} = -\ln S - \ln g \cdot \ln C \cdot C^x$$

Las probabilidades temporales de supervivencia y muerte serán:

$${}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 S^{x+n} g^{C^{x+n}-1}}{l_0 S^x g^{C^x-1}} = S^n g^{C^x(C^n-1)}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - S^n g^{C^x(C^n-1)}$$

Y finalmente:

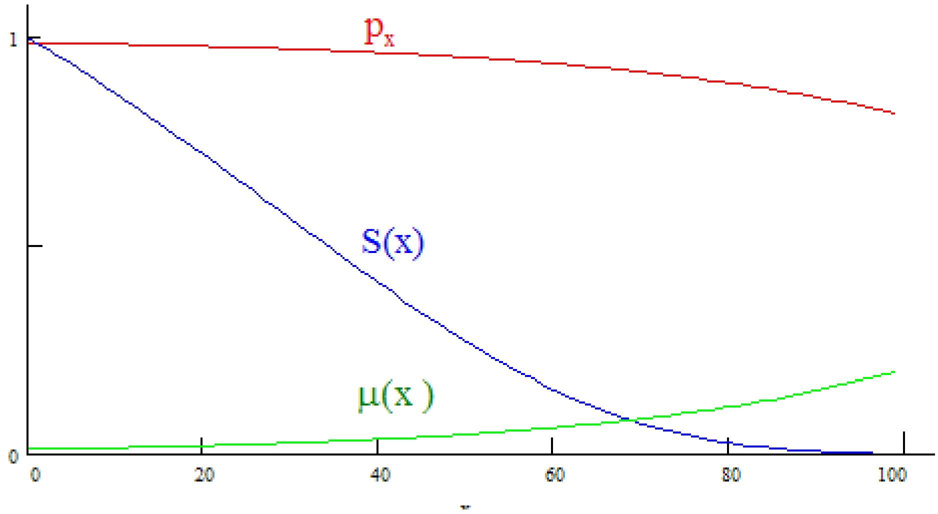
$$S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = S^x g^{C^x-1}$$

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - S^x g^{C^x-1}$$

$$f(x) = F'(x) = S^x g^{C^x-1}\left(-\ln S - \ln g \cdot \ln C \cdot C^x\right)$$

$$g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = S^t g^{C^x(C^t-1)} \cdot \left(-\ln S - \ln g \cdot \ln C \cdot C^{x+t}\right)$$

En este gráfico se muestran las funciones S(x), μ(x) y p_x para el caso de una ley de Makeham con parámetros: C=1.03 ,g=0.7 y S=0.998, puede verse cómo el perfil es muy similar a la ley de Gompertz.



La primera Ley de Makeham suele presentar problemas de ajuste a las edades más jóvenes por lo que a menudo se utiliza una segunda ley de Makeham que considera el tanto instantáneo como: $\mu(x)=A+Hx+BC^x$.

Modelo	ley de Makeham
enunciado	La mortalidad (tanto instantáneo) se debe, en parte a causas naturales, factor creciente con la edad ;y en parte a causas accidentales, factor constante
Distribución de X	
l(x)	$l_0 S^x g^{C^x-1}$ $\quad 0 < g,S < 1\,;\ C > 1$
d_x	$l_0 S^x g^{C^x-1}\left(1-Sg^{C^x(C-1)}\right)$
p_x	$Sg^{C^x(C-1)}$
q_x	$1-Sg^{C^x(C-1)}$
μ_x	$-\ln S-\ln g\cdot\ln C\cdot C^x$
${}_np_x$	$S^n g^{C^x(C^n-1)}$
${}_nq_x$	$1-S^n g^{C^x(C^n-1)}$
S(x)	$S^x g^{C^x-1}$
F(x)	$1-S^x g^{C^x-1}$
f(x)	$S^x g^{C^x-1}\left(-\ln S-\ln g\cdot\ln C\cdot C^x\right)$
$g_x(t)$	$S^t g^{C^x(C^t-1)}\cdot\left(-\ln S-\ln g\cdot\ln C\cdot C^{x+t}\right)$
e_x	Se obtiene por su definición
V_x	Se obtiene por su definición