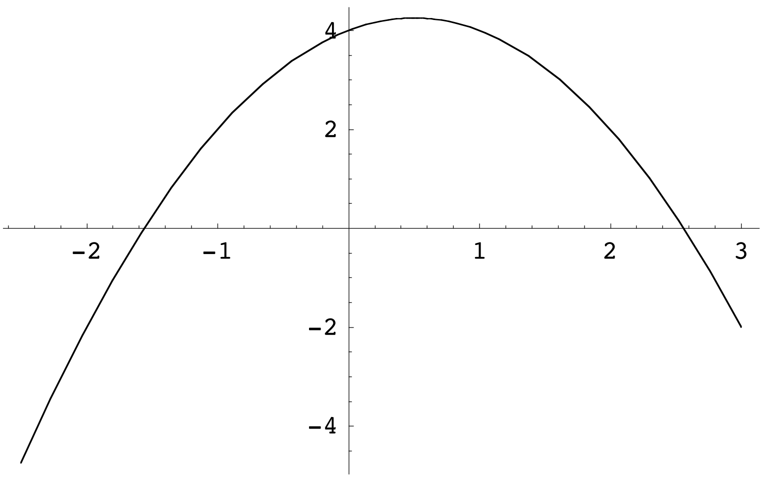
Sea I =]a, b[, a < b,
y sea f:I --> ℝ.
Diremos que un **punto x ∈ I es un máximo** de f ,
y que f (x) es un valor máximo
si f (x) ≥ f (y) para todo y ∈ I .

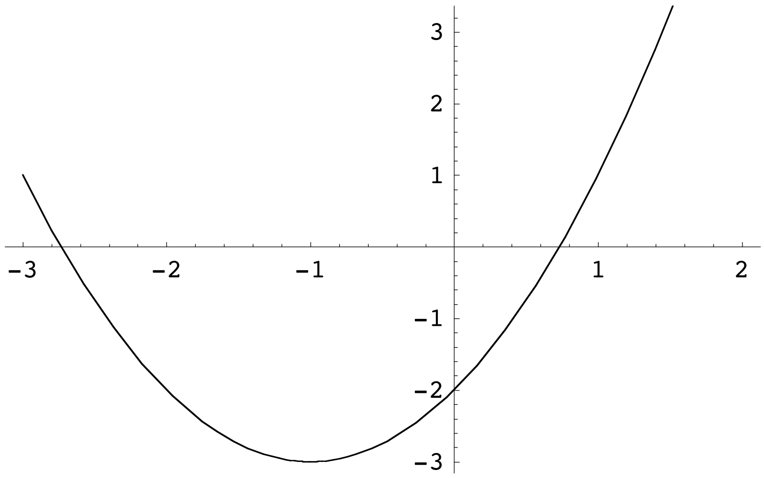
Diremos que un **punto x ∈ I es un mínimo** de f ,
y que f (x) es un valor mínimo
si f (x) ≤ f (y) para todo y∈ I .

```
(*Ejemplo de máximo*)

(* Sea *) f[x_] := 4 - x^2 + x
Plot[f[x], {x, -2.5, 3}];
```




```
(*como vemos en la figura, x=1/2 es un máximo *)

(* EJEMPLO:Sea*)
```

```
g[x_] := x^2 - 2 + 2 x
Plot[g[x], {x, -3, 2}];
```




```
(*como vemos en la figura, x= -1 es un mínimo *)
```

■ (*¿Cómo encontrar máximos y mínimos?*)

Un punto $x \in I$ se dice que es un **punto crítico** de una función f definida sobre I
si $f'(x) = 0$,
y al correspondiente número f (x) se le llama **valor crítico** de f .

```
(* Si revisamos los ejemplos anteriores,
 1/2 es punto crítico de f y -1 lo es de g *)
 (*¿Es esto una casualidad?*)
```

■ ¿Qué dice *f* ' sobre *f* ?

De la interpretación geométrica de la derivada de una función como pendiente de su gráfica se intuye que la pendiente de la curva en un punto es positiva si y sólo si la función es creciente
($x< y \Rightarrow f(x) < f(y)$) en las proximidades de ese punto.

También se deduce este hecho analíticamente a partir de la definición de derivada:
f es creciente en las proximidades de x
si para $\Delta x > 0$ suficientemente pequeño $f(x + \Delta x) > f(x)$,
de donde
$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x+\Delta x) - f(x))/\Delta x > 0$,
y recíprocamente,
si $\lim_{\Delta x \to 0}(f(x+\Delta x) - f(x))/\Delta x > 0$, para Δx suficientemente pequeño,
debe de ocurrir que
$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$.

Un argumento análogo se puede escribir para funciones decrecientes, resultando así

Test para Crecimiento/Decrecimiento
(a) f es creciente sobre un intervalo sii $f'(x) > 0$ sobre ese intervalo,
(a) f es decreciente sobre un intervalo sii $f'(x) < 0$ sobre ese intervalo .

¿Qué pasa en un máximo o en un mínimo?
Revisemos los ejemplos:

- En un máximo x, la función es, primero creciente ($f'(x) > 0$), y luego decreciente ($f'(x) < 0$), luego $f'(x) = 0$.

- En un mínimo x, la función es, primero decreciente ($f'(x) < 0$), y luego creciente ($f'(x) > 0$), luego $f'(x) = 0$.

Ejemplo

Determinar los intervalos en que la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x$ es creciente o decreciente. Determinar sus máximos o mínimos, si los tiene. Confirmar la respuesta dibujando la gráfica de la función.

```
f[x_] := x^3 - 9 x^2 + 30 x; Solve[f '[x] == 0]
```

```
{{x → 3 - i}, {x → 3 + i}}
```

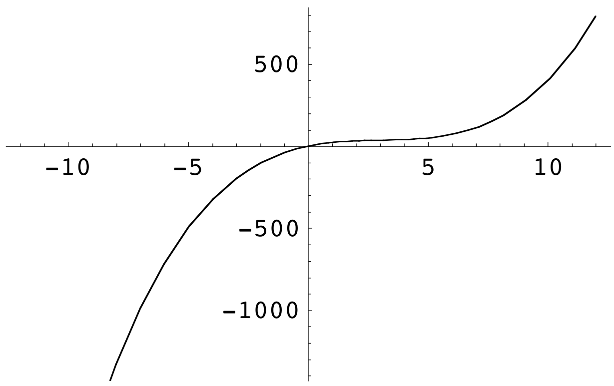
(Como f es un polinomio de grado 3, su derivada es un polinomio de grado dos, luego es de esperar que tenga dos soluciones. Como las dos soluciones que ha encontrado *Mathematica* son imaginarias, quiere decir que no tiene soluciones reales, es decir, que *f'(x)* no se anula nunca, luego tiene signo constante,
Luego f no tiene máximos ni mínimos absolutos (o los tiene en el infinito).
Para saber cual es ese signo, calculamos su valor en un punto

```
f '[0]
```

```
30
```

que resulta ser positivo, luego f es una función creciente en todo punto. Si, en lugar de calcular, dibujamos la gráfica de *f(x)*,

```
Plot[f[x], {x, -12, 12}];
```



comprobamos lo que acabamos de decir.

Determinar los máximos o mínimos de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x$ en el intervalo [-12,12], si los tiene. Confirmar la respuesta dibujando la gráfica de la función.

Antes vimos que f(x) es creciente (f'(x)>0) para x en]-12,12[, f(-12) < f(x) < f(12). Luego, en ese intervalo -12 es el punto mínimo y 12 el máximo. Los valores máximo y mínimo son

```
f[-12]
f[12]
```

```
-3384
```

```
792
```

```
(*Más ejemplos*)
```

• Encontrar los máximos y mínimos de la función
y(x) = x - 2 x^3
definida en el intervalo
formado por los puntos x que verifican
$0 \le x \le 1$.
Los puntos a considerar son: 0, 1 y aquellos x tales que y'(x) = 0. Calculemos primero estos puntos:
0 = y'(x) = 1 - 6x^2 , de donde x = 1/√6 ,
ya que la otra solución x = -1/√6
no se encuentra dentro del intervalo
[0, 1].
Los puntos máximo y mínimo han de estar, por tanto, entre 0, 1 o 1/√6. Calculemos y en cada uno de esos puntos:
y(0) = 0,
y(1) = -1,
y(1/√6) = 2/(3√6) ,
de donde se deduce que 1 es el punto mínimo y 1/√6 es el máximo, -1 es el valor mínimo y 2/3(√6) es el valor máximo.

• Encontrar los máximos y mínimos de la función
y(x) = x - 2x^3
definida en el intervalo
formado por los puntos x que verifican 0 < x < 1.
En este caso, el intervalo]0, 1[sobre el que está definida la función no es cerrado, y podemos olvidarnos de los extremos como candidatos a máximo o mínimo. Usando el ejercicio anterior, sabemos que , en el intervalo]0,1[, y' se anula solo en 1/√6. Este punto puede ser un máximo o un mínimo, para decidir cual de las dos cosas es, comparamos con el valor en otro punto, por

ejemplo y(0.5)=0.25 < 0.272166 = 0.272166=y(1/√6). Por lo tanto, 1/√6 es un máximo

```
(*Otro ejemplo*)

f[x_] := x (x^3 + x^2 - x)

f'[x]
```

$-x + x^2 + x^3 + x\,(-1 + 2\,x + 3\,x^2)$

```
Solve[f'[x] == 0, x]
```

$\{\{x \to 0\},\ \{x \to \frac{1}{8}\,(-3 - \sqrt{41})\},\ \{x \to \frac{1}{8}\,(-3 + \sqrt{41})\}\}$

```
f[0]
```

$\mathrm{N}[\mathrm{f}[\frac{1}{8}\,(-3 - \sqrt{41})]]$

$\mathrm{N}[\mathrm{f}[\frac{1}{8}\,(-3 + \sqrt{41})]]$

0

-1.09673

-0.0712342

Luego 0 es el máximo, $\frac{1}{8}\,(-3 - \sqrt{41})$ es el mínimo,
el valor máximo de f es 0 y el mínimo es -1.09673