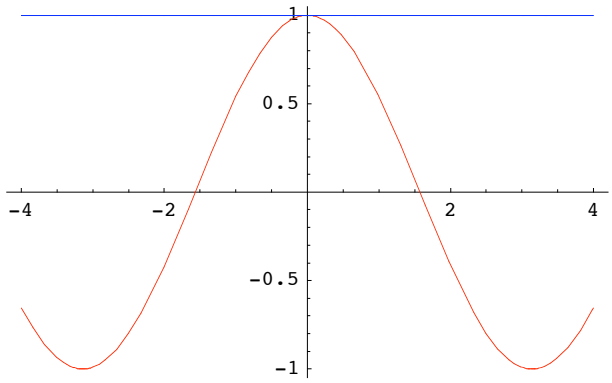
Fórmula de Taylor

Hoy trataremos de entender cómo se pueden construir funciones conociendo únicamente las funciones suma (resta), producto (división) y potenciación. Necesitaremos además comprender el concepto de límite y la derivación de funciones. Se trata de "sustituir" funciones complicadas por otras mas sencillas de calcular (que en este caso serán polinomios), controlando la "pérdida" que se produce.
Dibujemos la función f(x)=cos(x) cerca de 0, y su recta tangente en x=0.

```
f[x_] := Cos[x]
Plot[{f[x], 1}, {x, -4, 4},
 PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



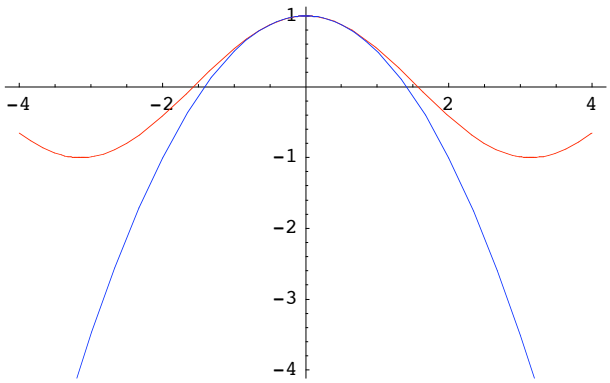
- Graphics -

En el gráfico podemos ver que en cuanto nos alejamos un poco del punto de tangencia (en este caso el 0), la función coseno y su tangente no se parecen nada.
Para mejorarlo, aproximaremos por un polinomio de grado mayor que se parezca lo más posible. El criterio será hacer coincidir las sucesivas derivadas. Por ejemplo, si buscamos un polinomio P de grado dos que aproxime a una función dos veces derivable, f, vamos a exigir que P(a)=f(a), P'(a)=f'(a) y P''(a)=f''(a). Con estas tres condiciones estamos en disposición de calcular los coeficientes de
P(x)=A(x-a)^2+B(x-a)+C. Haciendo cálculos sale
P(a) =C, luego
C= P(a) =f(a).
P'(x) = 2 A (x-a) + B, luego B= P'(a) = f'(a).
P''(x) = 2 A, luego 2 A = P''(a) = f''(a), luego A=f''(a)/2,
de modo que el polinomio es

$$P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Realizando cuentas, para a=0 y f(x)=cos(x), sale $P(x)=1-\frac{x^2}{2}$

```
Plot[{f[x], 1 - x^2/2}, {x, -4, 4},
 PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



- Graphics -

En general, el polinomio de grado n alrededor de a es

$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$

Llamado Polinomio de Taylor de f en el punto a.

donde n! = n (n-1) (n-2) ... 1,

por ejemplo 3! = 3 2 1 =6, 4!= 4 3 2 =24, ...

C u l t u r a :

$\binom{m}{n}$ es el número combinatorio que se define por $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$,

así, por ejemplo, $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$

¿Diferencia entre f (x) y P_n (x) dependiendo de (x – a)?

Teorema: Si f es una función (n+1) veces derivable, entonces existe c entre a y x (es decir, a<c<x) tal que $f(x)-P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Este teorema nos permite acotar el error cometido. En el ejemplo anterior,

$|\cos(x)-P_2(x)| = |\frac{f'''(c)}{3!}x^3| = |\frac{\operatorname{sen}(c)}{6}x^3|$

y como |sen(c)|≤1, si x está entre -π y π, tendremos |cos(x)-$P_2(x)$|≤$\frac{\pi^3}{6}$, si -b<x<b, |cos(x)-$P_2(x)$| ≤$\frac{b^3}{6}$.

Mathematica tiene una orden que permite calcular directamente el polinomio de Taylor centrado en un punto a. Se trata del comando Series, cuya sintaxis es

Series[función,{x,a,grado}]

Por ejemplo, Series[Cos[x],{x,0,2}]

```
Series[Cos[x], {x, 0, 2}]
```

$$1 - \frac{x^2}{2} + O[x]^3$$

Aparece un término $O[x]^3$ que indica que representa al resto del teorema.

Vamos a representar cos(x) junto con el polinomio de Taylor de grado 9.

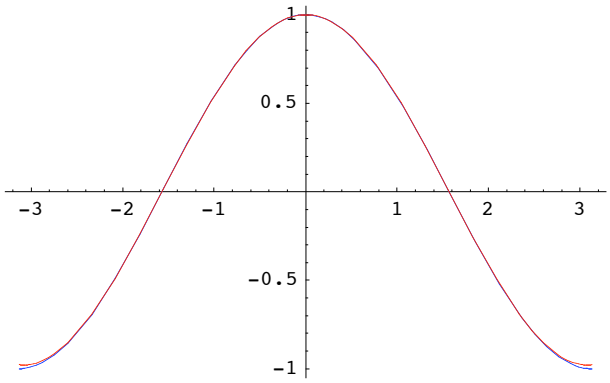
```
f[x_] := Cos[x]
g[x_] := Series[f[x], {x, 0, 9}]

g[x]
```

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + O[x]^{10}$$

Comprobemos, dibujando, lo ajustado de esta aproximación,

```
Plot[{f[x], 1 - x^2/2 + x^4/24 - x^6/720 + x^8/40320}, {x, -π, π},
 PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 0]}
]
```



- Graphics -

¿Qué significa el término término $O[x]^3$?

Recordemos que $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

para $a < c < x$. Entonces :

$$\mathrm{Lim}_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = \mathrm{Lim}_{x\to a} \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = 0$$

Es decir, el error que se comete al tomar el polinomio de Taylor de grado n de una función f es de un orden mayor que x^n cuando $x \to 0$, o, lo que es lo mismo, del mismo orden que x^{n+1} eso es lo que se quiere decir con $O(n+1)$, que *Mathematica* lo indica con $O[x]^{n+1}$.

Teorema (Regla de L' Hôpital) Si f y g son funciones derivables definidas sobre un intervalo I, a es un punto interior de I, y se cumplen

a) $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$,

b) $g'(x) \neq 0$ para x en un intervalo abierto que contiene a a, y

c) existe $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ (que puede ser también $+\infty$ o $-\infty$), entonces se verifica que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La demostración de esta regla puede hacerse usando el desarrollo de Taylor.