Apuntes de Fundamentos Matemáticos para el Estudio del Medio Ambiente

Curso 2006-2007 [1]

Primer cuatrimestre

Vicente Miquel Molina

February 27, 2007

[1]Versión preliminar. Se agradece el envío de correcciones y sugerencias a miquel@uv.es

Índice de materias

Bibliografía

[1] I. Anshel, D. Goldfeld: *Calculus. A computer algebra approach*, International Press Boston **1996**.

[2] T.M. Apostol :, *Calculus I y II,* Reverté, Barcelona **1989**.

[3] K. Binmore y J. Davies, *Calculus. Concepts and Methods*, Cambridge U. P. , Cambridge **2001**.

[4] A. Gray, M. Mezzino y M. A. Pinsky *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer Velrag, colección Telos, Santa Clara, California, Nueva York, Londres **1981**.

[5] J. H. Hubbard y B. Burke-Hubbard: *Vector Calculus, Linear ALgebra and Differential Forms,* Segunda edición, Prentice Hall Boca Raton, London **2002**

[6] J. Marsden y A. Weinstein *Calculus I, II y III* Springer Verlag, Nueva York **1985**

[7] M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, Routledge, Londres **2003**.

[8] S.L. Salas y E. Hills, *Calculus I y II*, Reverté, Barcelona **1994**.

[9] J. Stewart: *Cálculo : conceptos y contextos,* Tercera Edición, International Thomson, Méjico, **1983**

[10] S. T. Tan: *Applied Calculus for the Managerial, Life, and Social Sciences*, 5th Edition, Thomson Learning, Belmont **2002**

[11] G. B. Thomas y R.L. Finney, *Cálculo con Geometría Analítica*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, **1987**.

Los libros [4] y [5] son de un nivel claramente superior al del curso, pero están en la bibliografía porque se han usado para algunos detalles de estos apuntes.

Capítulo 1

El lenguaje: Conjuntos y aplicaciones

1.1 Conjuntos, elementos y subconjuntos. Ejemplos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Un *conjunto* A es un objeto matemático que tiene *elementos*. Indicamos que un elemento a es del conjunto A con el símbolo

$$a \in A \text{ que se lee: } a \text{ pertenece a } A.$$

Entre los conjuntos más usados en Matemáticas se encuentran los conjuntos cuyos elementos son números. Los números más conocidos son los números naturales, que se introducen para contar. El conjunto de los números naturales lo representamos por $\mathbb{N}$, y el de los números naturales excepto el 0 por $\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ \}, \quad \mathbb{N}^* = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ \}.$$

Lo que acabamos de hacer es un modo estándar de describir un conjunto: poniendo entre llaves los elementos que lo contienen. En este caso, como la cantidad de elementos es infinita y no los podemos describir todos, ponemos los puntos suspensivos que permiten entender al lector los elementos que estamos considerando. Ordinariamente habrá que emplear otros "trucos" que permitan describir (con más precisión que los puntos suspensivos) los elementos del conjunto.

En el conjunto $\mathbb{N}$ tenemos bien definidas las operaciones de suma y producto. Si, en él, consideramos la ecuación

$$x + m = n, \text{ con } m\ ,\ n \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ la incógnita,}$$

nos encontramos con que sólo tiene solución si $m \leq n$. Para tener soluciones cuando $m > n$, necesitamos ampliar el concepto de número, introduciendo los enteros negativos, tenemos así un nuevo conjunto de números, el de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ ...\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ \}.$$

Denotaremos por $\mathbb{Z}^*$ el conjunto de todos los números enteros menos el número 0.

Si ahora consideramos la ecuación

$$m\,x = n,$$

solo tiene solución en $\mathbb{Z}$ si n es un múltiplo de m. Para tener soluciones cuando no es así, necesitamos introducir los números fraccionarios. Aparece así el conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Acabamos de hacer ahora una descripción más usual de los elementos de un conjunto. Como hicimos cuando describimos los naturales, hemos colocado los elementos del conjunto entre llaves, pero ahora hemos descrito con precisión sus elementos, hemos dicho que el conjunto $\mathbb{Q}$ está formado por todos los elementos de la forma $\frac{m}{n}$ para cualesquiera números enteros m y n, con $n \neq 0$ (lo que hemos descrito por $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^*$).

De nuevo aparecen magnitudes (como $\sqrt{2}$, π, ...) que no son números racionales, no están en $\mathbb{Q}$, y es preciso introducir el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que contiene, además de los números racionales, números no racionales como $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{3}$, e, ... Se tiene

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

donde el símbolo $\subset$ significa (y se lee) "contenido". En general, dados dos conjuntos A y B, *decimos que A es un subconjunto de B o que A está contenido en B si todo elemento de A es también un elemento de B*, lo que simbólicamente se escribe así:

$$A \subset B \text{ si } x \in A \text{ implica } x \in B,$$

o, también

$$A \subset B \text{ si y solo si para todo } x \in A \text{ se tiene que } x \in B,$$

o, más abreviadamente

$$A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B).$$

Si consideramos ahora la ecuación

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \tag{1.1}$$

sabemos que sus soluciones en $\mathbb{R}$ vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

de donde se deduce que las soluciones existen si y solo si $b^2 - 4ac \geq 0$. Por lo tanto, si queremos que la ecuación (1.1) tenga solución siempre, necesitamos que la raíces de números negativos existan. Esto es lo que lleva a la definición de los números complejos.

Comenzamos definiendo el número i. Es un número (imaginario) que verifica que $\sqrt{-1} = i$ ó, equivalentemente, que $i^2 = -1$.

Una vez que tenemos definido el número i, existirá la raíz de cualquier número negativo, será:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a\,(-1)} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i = i\,\sqrt{a}, \quad \text{donde } a > 0.$$

Tenemos así definidos los números imaginarios, que son los productos por i de los números reales.

Queremos que los nuevos números a introducir, los complejos, contengan estos números imaginarios (que son las raíces de números negativos) y, además, los números reales, por lo tanto deberán contener la suma de un número real y un número imaginario. Definimos entonces el conjunto de los números complejos por

$$\mathbb{C} = \{a + ib;\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado un número complejo $z = a + i\ b$, se llama parte real de z a $\Re(z) = a$ y parte imaginaria a $\Im(z) = b$.

Escribiremos $0 + i\ b = i\ b$, y $a + i\ 0 = a$, de este modo se puede considerar que todo número real a es complejo identificándolo con $a + i\ 0$. Resulta así $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ejercicios

1. Escribe todos los elementos de los siguientes conjuntos:

   (a) $\{n^2; n \in \mathbb{Z} \text{ y } -2 \leq n \leq 3\}$, (b) $\{x^2; x \in \mathbb{R}\}$,

   (c) $\{z^n; z = 1 + i,\ n \in \mathbb{Z},\ -1 \leq n \leq 1\}$, (d) $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 + x - 1 = 0\}$,

   (e) $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 + x + 1 = 0\}$, (f) $\{x \in \mathbb{C};\ x^2 + x + 1 = 0\}$.

2. Dí si son ciertas o no, y explica por qué, las siguientes relaciones:

   (a) $8 \in \{n^3;\ n \in \mathbb{N}\}$, (b) $(1, 2) \in \{(x, y);\ x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}$,

   (c) $(3, 4) \in \{(x, y);\ 3 < x < 5,\ 3 < y < 6\}$,

   (d) $3 \in \{x \in \mathbb{R};\ x^3 - x^2 - x - 15 = 0\}$, (e) $1 + i \in \{z \in \mathbb{C};\ z^2 = 1\}$,

   (f) $(3, 4) \in \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 7,\ x - y = -1\}$,

   (g) $(3, 4) \in \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 7,\ x - y = 1\}$.

3. Dí cuales de los siguientes números son naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, complejos, imaginarios puros (si de alguno no sabes exactamente qué tipo de número es, di al menos por qué no lo sabes y, en su caso, lo que te parece más probable): 3, $3'14159$, π, $5/8$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $1'4142$, e, $2'71828$, $1'73205$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $3 +\ i$, $3'14159\ i$, $\imath\pi$, $i - 5/8$, $3\ i + \sqrt{3}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{1'4142}$, $\sqrt{-e}$, $(\sqrt{2'71828})^4$, $(\sqrt{-1'73205})^2$, $\frac{i}{5}$, $\frac{6}{5} - \frac{7}{6}\ i$, $(-\frac{5}{6}\ i)^2$.

1.2 Operaciones con conjuntos: unión, intersección y complementario. Ejemplos con intervalos.

Dados dos conjuntos A y B, definimos su *unión* por

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ó } x \in B\},$$

dicho de otra manera, $A \cup B$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en A ó B. Intuitivamente, la unión de dos conjuntos es el conjunto que resulta de juntar los dos.

Del mismo modo, dados n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, se define su unión por

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \{x;\ x \in A_i \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

o también,

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \{x;\ x \in A_i \text{ para algún } i,\ 1 \leq i \leq n\},$$

o también,

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \{x;\ \text{existe un } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } x \in A_i\},$$

o también,

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \{x;\ \text{existe un } i,\ 1 \leq i \leq n \text{ tal que } x \in A_i\}.$$

La *intersección de conjuntos* se define así:

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ y } x \in B\},$$

dicho de otra manera, $A \cap B$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en A y en B. Es decir, la intersección de dos conjuntos es el conjunto que resulta de tomar los elementos que están a la vez en los dos conjuntos.

Del mismo modo, dados n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, se define su intersección por

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = \{x;\ x \in A_i \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

o también,

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = \{x;\ x \in A_i \text{ para todo } i,\ 1 \leq i \leq n\},$$

o también,

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = \{x;\ \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ se verifica que } x \in A_i\},$$

o también,

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = \{x;\ \text{para todo } i,\ 1 \leq i \leq n \text{ se tiene que } x \in A_i\}.$$

El conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío, y se escribe $\emptyset$.

Dos *conjuntos* A y B que no tienen ningún elemento en común tienen intersección vacía, $A \cap B = \emptyset$, y se dice que son *disjuntos*.

Dado un conjunto X y un subconjunto $A \subset X$, se llama *diferencia de X y A, o, también, complementario de A (en X)*, al conjunto

$$X - A = \{x;\ x \in X \text{ y } x \notin A\}.$$

Se deduce de esta definición que $X - A = \emptyset$ si y solo si $X = A$, y $X - A = X$ si y solo si $A = \emptyset$.

También para el caso $A, B \subset X$ se define $B - A = \{x;\ x \in B \text{ y } x \notin A\}$. Con esta definición se tiene que $B - A = \emptyset$ si y solo si $B \subset A$, y $B - A = B$ si y solo si $B \cap A = \emptyset$

Unos conjuntos que manejaremos mucho a lo largo de este curso son los intervalos. Se definen de la siguiente manera:

Un**intervalo** I es un subconjunto de $\mathbb{R}$ de una de las siguientes formas:

Intervalo cerrado de extremos a y b:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Intervalos semiabiertos de extremos a y b:

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

(donde puede ocurrir que $a = -\infty$ y, entonces: $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$) y

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$$

(donde puede ocurrir que $b = \infty$ y, entonces: $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$).

Intervalo abierto de extremos a y b:

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$$

(donde puede ocurrir que $a = -\infty$ ó que $b = \infty$, y, entonces: $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$, $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$, $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$.)

Un intervalo de extremos $a \neq \infty$, $b \neq \infty$ se dice que es un **intervalo acotado**.

Para las uniones e intersecciones de los intervalos se tendrá que:

Si $a < b \leq c < d$, $]a,b[\cap[c,d[= \emptyset$, mientras que $]a,b[\cup[c,d[= \begin{cases}]a,d[& \text{si } b = c \\ ]a,b[\cup[c,d[& \text{si } b < c \end{cases}.$

Si $d > b > c > a$, $\quad]a,b[\cap[c,d[= [c,b[\quad$ y $\quad]a,b[\cup[c,d[=]a,d[$.

$[a,b] \cap [b,d] = \{b\}$, $\quad [a,b] \cup [b,d] = [a,d]$.

El resto de casos de posibles uniones e intersecciones de intervalos se deja como ejercicio al lector.

Como ejemplos de complementario de un conjunto en $\mathbb{R}$ tenemos:

$\mathbb{R}-]-\infty, a] =]a, \infty[$, $\quad \mathbb{R}-]a,b] =]-\infty, a]\cup]b, \infty[$, $\quad \mathbb{R} - \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, \infty[$.

Ejercicios

Calcula las intersecciones y uniones que se indican a continuación:

1. $\{n^2; n \in \mathbb{Z} \text{ y } -2 \leq n \leq 3\} \cap \{n \in \mathbb{N}\ ;\ 1 \leq n \leq 7\}$,
2. $\{x^2; x \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{R}$,
3. $\{x^3;\ x \in \mathbb{R}\} \cap \{x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}\}$,
4. $\{x^2;\ x \in \mathbb{R}\} \cap \{x + 1;\ x \in \mathbb{R}\}$, $\quad$ (e) $\{x^2;\ x \in \mathbb{R}\} \cap \{x - 1;\ x \in \mathbb{R}\}$
5. $\{x^3;\ x \in \mathbb{R}\} \cap \{x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}\} \cap \{x^2 - 1;\ x \in \mathbb{R}\}$
6. $\big(\{x^3;\ x \in \mathbb{R}\} \cap \{x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}\}\big) \cup \{x - 1;\ x \in \mathbb{R}\}$

7. $\big(\{x^3;\ x\in\mathbb{R}\}\cup\{x^2-1;\ x\in\mathbb{R}\}\big)\cap\{x+1;\ x\in\mathbb{R}\}$
8. $]\sqrt{2},\sqrt{3}[\cap]\frac{3}{2},2[,\quad]\sqrt{2},\sqrt{3}[\cup]\frac{3}{2},2[$
9. $]-\sqrt{2},\sqrt{3}[\cap]-\frac{3}{2},2[,\quad]-\sqrt{2},\sqrt{3}[\cup]-\frac{3}{2},2[$
10. $]-\sqrt{12},-\sqrt{3}[\cap]-2,-\frac{3}{2}[,\quad]-\sqrt{12},-\sqrt{3}[\cap]-2,-\frac{3}{2}[$.

1.3 Producto cartesiano de conjuntos. Ejemplos con conjuntos de números. Introducción al espacio n-dimensional

Dados dos conjuntos X e Y, se define su producto cartesiano como el conjunto $X\times Y$ formado por los pares de elementos (x,y), donde $x\in X$ e $y\in Y$. Es decir,

$$X\times Y=\{(x,y);x\in X \text{ y } y\in Y\}.$$

En general, dados n conjuntos X_1, ..., X_n, su producto cartesiano es

$$X_1\times ...\times X_n=\{(x_1,x_2,...,x_n);x_i\in X_i \text{ para cada } i\in\{1,...,n\}\}.$$

Si $X_1=...=X_n=X$, escribiremos X^n en lugar de $X\times\overset{n}{\ldots}\times X$.

De acuerdo con la definición que acabamos de dar, no es estrictamente cierto que $(X\times Y)\times Z=X\times(Y\times Z)=X\times(Y\times Z)$, pero aceptaremos, por convenio, que se tiene la igualdad anterior (es decir, aceptaremos que $((x,y),z)=(x,(y,z))=(x,y,z)$).

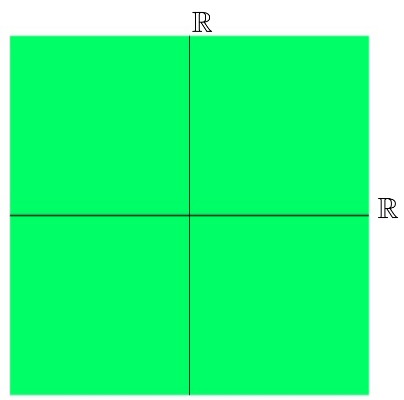
Veamos algunos ejemplos:

$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y);\ x,y\in\mathbb{R}\}$, es decir, $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de elementos con dos coordenadas reales, que, a menudo, identificaremos con los puntos del plano porque, cuando se elige un sistema de coordenadas, cada punto del plano viene dado por un par de números reales (sus coordenadas).

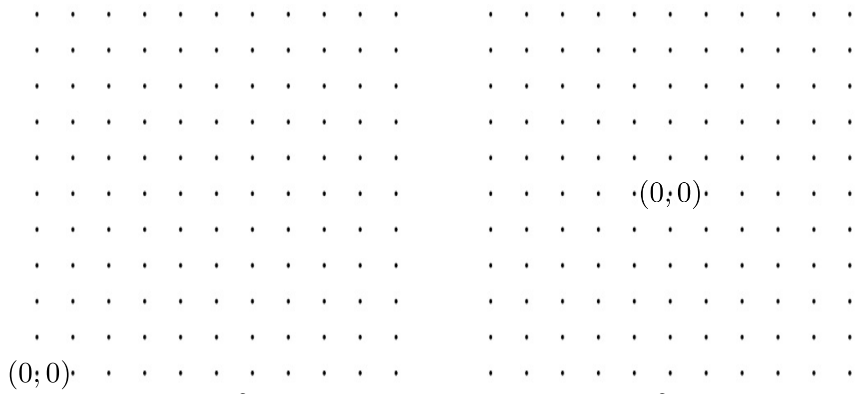
$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y,z);\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$, es decir, $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de elementos con tres coordenadas reales, que a menudo identificaremos con los puntos del espacio, por razones semejantes a las anteriores.

En general, $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\overset{n}{\ldots}\times\mathbb{R}=\{(x_1,\ldots,x_n);\ x_i\in\mathbb{R} \text{ para todo } i\in\{1,...,n\}\}$.

Análoga es la descripción de $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Q}^n$. Gráficamente podríamos describir así los productos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{N}^2$ y $\mathbb{Z}^2$:

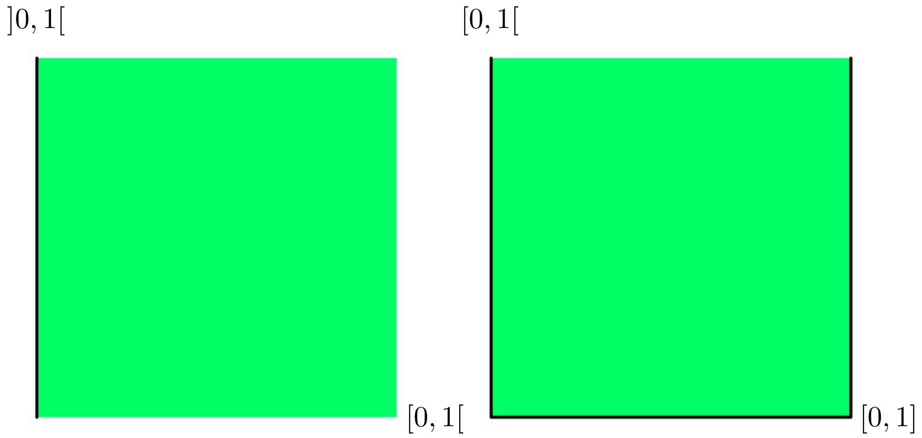


$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



$\mathbb{N}^2$ $\mathbb{Z}^2$

Para intervalos, tenemos:
$[0,1[\times]0,1[= \{(x,y);\ 0 \leq x < 1,\ 0 < y < 1\}$,
$[0,1] \times [0,1[= \{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y < 1\}$,



$[0,1[\times]0,1[$ $[0,1] \times [0,1[$

A $\mathbb{R}^n$ se le llama habitualmente espacio de dimensión n, de modo que la dimensión aparece aquí como el número de variables (o números reales) que tiene cada elemento del espacio (o que describe cada punto del espacio). Con más precisión (pero sin llegar a la precisión matemática), *la dimensión de un conjunto es el número mínimo de variables necesario para describir los elementos de un conjunto.*

Ejercicios

1. Describir y/o dibujar, cuando sea posible, los siguientes conjuntos:

   a) $]-\pi,\pi[\times[0,1]$, b) $]-\pi,\pi[\times\{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 3\}$,

   c) $\{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 3\} \times [0,1]$, d) $]-\pi,\pi[\times\{\frac{m}{n}; m,n \in \mathbb{Z},\ 0 \leq m \leq 1,\ 1 \leq n \leq 3\}$,

   e) $\{(m,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}; -2 \leq m \leq 1\}$, f) $\{(m,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 3\}$

2. Indica las dimensiones de los siguientes espacios: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^{27}$, $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^{14}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^5$, $[0,1] \times]1,3[\times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{12} \times [0,1] \times]1,3[\times \mathbb{R}$

3. Calcula las intersecciones y uniones que se indican a continuación, y dibújalas cuando sepas hacerlo:

   (a) $\{(n^3, 0);\ n \in \mathbb{N}\} \cap \{(x, y);\ x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 27\}$,

   (b) $\{(n^3, 0);\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y);\ x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 27\}$

   (c) $\{(x, y);\ 3 < x < 5,\ 3 < y < 6\} \cap \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R};\ x^2 - x - 15 = 0\}$,

   (d) $\{(x, y);\ x \in \mathbb{R},\ y = 0\} \cap \{(x, y); x, y \in \mathbb{R};\ x^2 - x - 15 = 0\}$.

1.4 Funciones. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas. Gráfica de una función. Ejemplos de funciones reales.

Una *función o aplicación f entre dos conjuntos X e Y*, $f : X \longrightarrow Y$ es una regla que a cada $x \in X$ le asigna un único elemento $f(x) \in Y$, que se llama imagen de x por f.

El conjunto X se llama dominio de f, y también espacio o conjunto de partida de f. El conjunto Y se llama espacio o conjunto de llegada. El conjunto $f(X) = \{y \in Y;$ existe un $x \in X$ que verifica $y = f(x)\}$ formado por todas las imágenes $f(x)$ de elementos $x \in X$ por f se llama *imagen de f o, también, imagen de X por f, o rango de f*.

A menudo se dan funciones sin especificar el dominio ni el rango. En estos casos, el dominio está implícito por el conjunto de números sobre el que esta operación tiene sentido, dentro del conjunto de números sobre el que se está trabajando. Por ejemplo, podemos leer en un libro que determinado proceso físico sigue una ley dada por la función $+\sqrt{x}$. El signo más delante de la raíz indica que estamos trabajando con números reales y que, de los dos posibles valores de la raíz cuadrada ($+\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$), tomamos el positivo. El espacio de llegada es, por tanto, el de los números reales. La expresión $\sqrt{x}$ solo tiene sentido si $x \geq 0$, luego el dominio de la función es $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$.

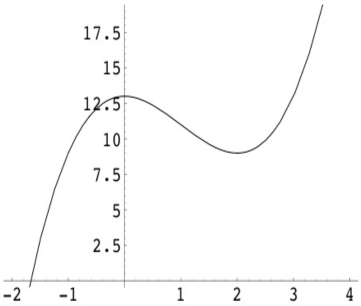
Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *inyectiva* si, para cualesquiera $x, y \in X$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$, es decir, si dos elementos distintos de X tienen dos imágenes distintas. Por ejemplo, la aplicación $\operatorname{sen} : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva, pero no lo es $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

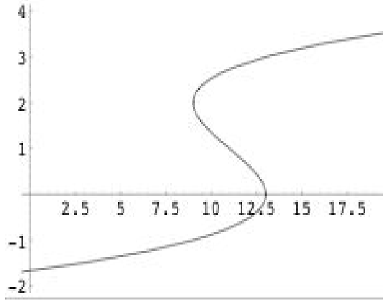
Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *suprayectiva (o sobreyectiva, o sobre)* si $f(X) = Y$, es decir, si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por ejemplo, la aplicación $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ es suprayectiva, pero no lo es $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *biyectiva* si es inyectiva y supreyactiva. Por ejemplo, ninguno de los cuatro ejemplos anteriores es una función biyectiva, pero sí lo es la aplicación $\operatorname{sen} : [0, \pi/2] \longrightarrow [0, 1]$

El conjunto $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y;\ x \in X\}$ se llama *gráfica o grafo de la función f*, y es un subconjunto de $X \times Y$. La gráfica de una función lleva toda la información sobre la función, pues está formada por pares en los que el primer elemento recorre todo el espacio de partida y el segundo dice cual es su imagen.

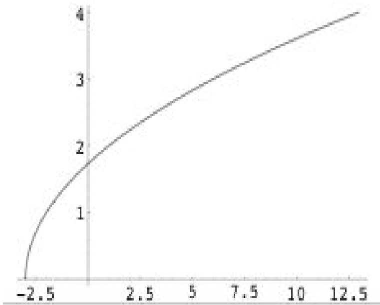
En el caso en que $X, Y \subset \mathbb{R}$, estas funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llaman funciones reales de variable real, y su gráfica $G(f)$ es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Así, si tenemos las dos posibles gráficas de funciones siguientes:

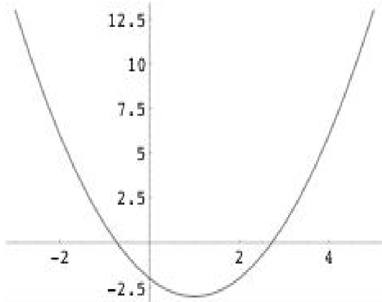




la de la izquierda representa la gráfica de una función, mientras que la de la derecha no.

Por otro lado, en las siguientes figuras

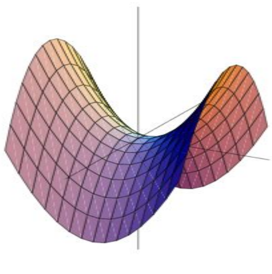


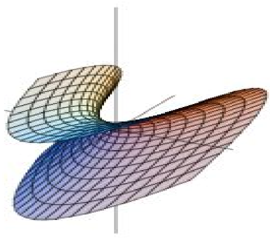


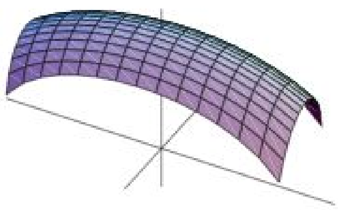
la de la izquierda representa la gráfica de una función biyectiva, mientras que la de la derecha representa a una función no biyectiva.

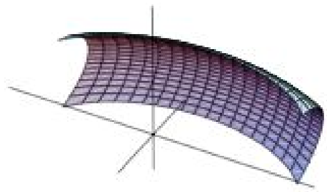
En el caso en que $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, estas funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se llaman funciones vectoriales de varias variables reales, y su gráfica $G(f)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Cuando $m = 1$, las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se llaman funciones reales de varias variables reales, y su gráfica $G(f)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

A continuación se muestran dos ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que son gráficas de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y otros dos que no pueden ser la gráfica de ninguna aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.









Las razones por las que las primeras figuras son gráficas de funciones y las segundas no son semejantes a las que se dieron para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y se deja al lector como ejercicio que las escriba.

Dadas dos aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, se define la aplicación *composición* de f y g

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \text{ por } g \circ f(x) = g(f(x)).$$

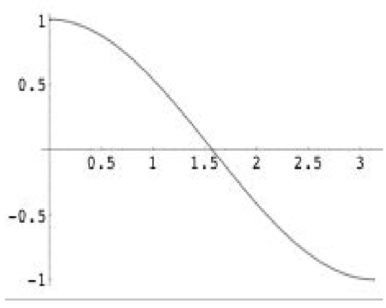
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Para entender las composiciones de aplicaciones, a menudo es útil considerar diagramas como el adjunto.

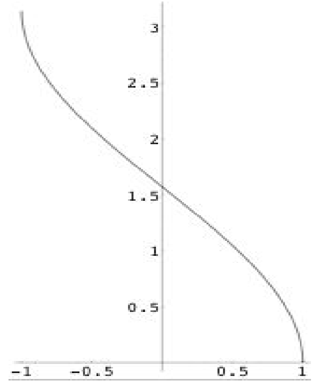
Cuando una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva, existe la *aplicación inversa* f^{-1}, que es aquella aplicación $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$.

Así, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es biyectiva como aplicación de $[0, \infty[$ en $[0, \infty[$ (aunque no lo es como aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), y su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. La función $\operatorname{sen} : [0, \pi/2] \longrightarrow [0, 1]$, que vimos antes que era biyectiva, tiene una inversa $\operatorname{arcsen} : [0, 1] \longrightarrow [0, \pi/2]$.

Si $G(f)$ es la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la gráfica de su función inversa se obtiene cambiando los ejes X e Y, como en el siguiente ejemplo:



$f(x)$



$f^{-1}(x)$

Aunque se use la misma notación, no hay que confundir la función o aplicación inversa de una función biyectiva con la antiimagen de un conjunto o punto.

Dada una aplicación $f : X \longrightarrow Y$, y dado un subconjunto $B \subset Y$, se llama antiimagen de B por f, y se denota por $f^{-1}(B)$ al conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}.$$

En particular, cuando B consta de un solo elemento, es decir, cuando $B = \{y\}$ para un $y \in Y$, se tiene

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X; f(x) = y\}.$$

Y se suele escribir $f^{-1}(y)$ en lugar de $f^{-1}(\{y\})$.

Así, por ejemplo, dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, $f^{-1}([0, \infty[) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$.

Obsérvese que, mientras las antiimagenes $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(y)$ están definidas cualquiera que sea la aplicación f, la aplicación inversa sólo está definida si f es biyectiva.

Ejercicios (Muchos lectores deberán estudiar la sección 1.5 antes de intentar resolverlos)

1. Dadas las aplicaciones f, g, h de cada uno de los apartados siguientes, escribir $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ f$, $h \circ g \circ f$, indicando el dominio y el rango de cada una de esas aplicaciones:

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$,

   (b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = a\ x^2 + b\ x$, $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$,

   (c) $f(x) = \log_{10} x$, $g(x) = 10^x$, $h(x) = \frac{1}{x}$,

   (d) $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = \cos x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$.

2. Para cada una de las aplicaciones f que se dan a continuación, escribir su dominio y su imagen. Decir también si tienen o no inversa, y si es posible que la tengan restringiendo su dominio o el espacio de llegada. En todos los casos en que se haya podido ver que existe inversa, calcularla:

   (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4 + 2x^2$, $f(x) = x^6 + 2x^3$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = 10^x$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f(x) \operatorname{sen} x$

   (b) $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{10} x$, $f(x) = \sqrt{x}$, $x(x) = x^{\frac{1}{4}}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $f(x) = \cos x^{\frac{1}{2}}$, $h(x) = x^{\frac{1}{8}}$.

1.5 Ejemplos clásicos: las funciones elementales

Se llama funciones elementales a las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ más simples y mejor conocidas. Son las que damos a continuación:

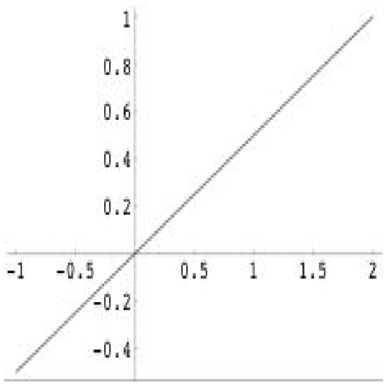
Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = a\ x$. Se llaman así porque su gráfica es una recta de pendiente[1] a que pasa por el origen y porque, además, verifica las propiedades:

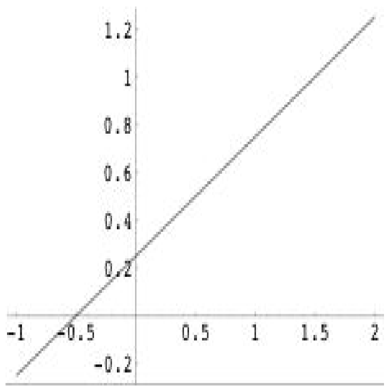
---

[1]Se llama pendiente de una recta en el plano a la tangente del ángulo que dicha recta forma con el eje de las x

(l1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$,
(l2) $f(\lambda x) = \lambda\ f(x)$, para cualesquiera $\lambda, x \in \mathbb{R}$,
como le resultará fácil comprobar al lector.

Una **función afín** es una función de la forma $f(x) = a\ x + b$. Su gráfica es una recta de pendiente a que pasa por el punto $(0, b)$. Como se ve, se diferencia de una lineal sólo en la constante b, y, naturalmente, una función lineal es un caso especial de función afín (caso $b = 0$).

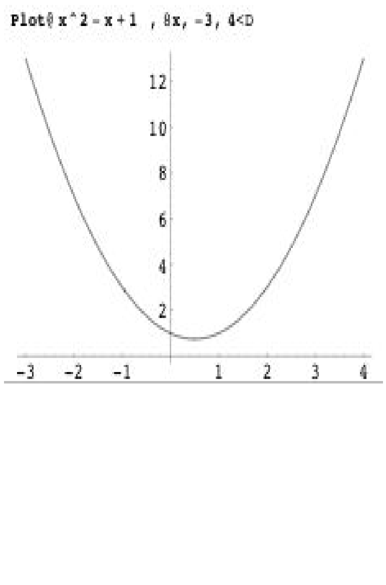


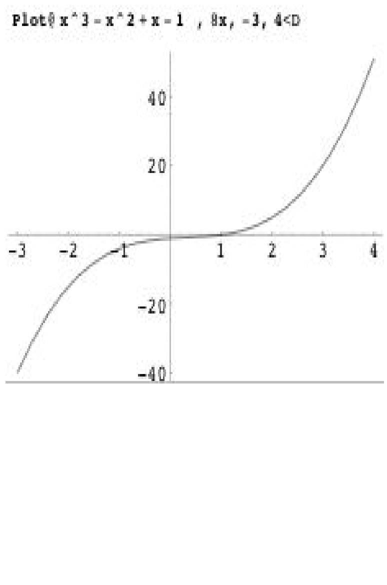


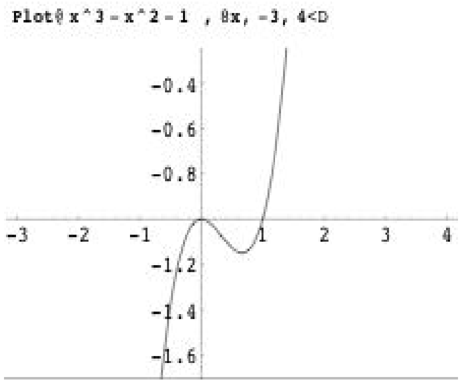
Una **función polinómica** es una función de la forma

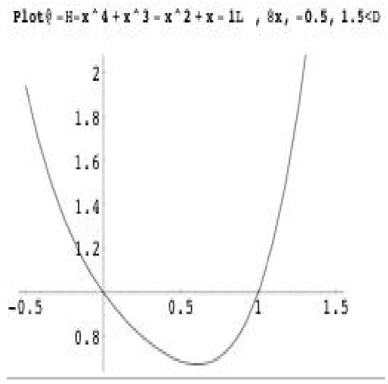
$$f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_p x^p,$$

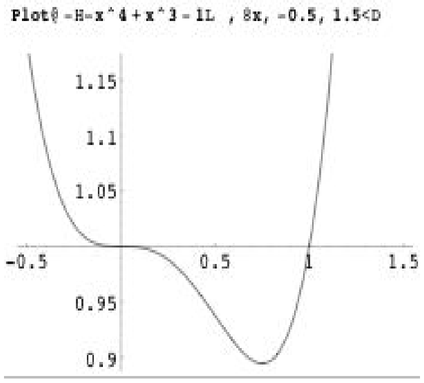
que se llama polinomio (o función polinómica) de grado p, a_0 es el término independiente, a_n es el coeficiente del término de grado n, a_p es el coeficiente del término de grado máximo, y a_0 se llama también término independiente. *Los polinomios más sencillos son los de grado cero, cuya gráfica es una recta horizontal, y los de grado* 1*, cuya gráfica es una recta inclinada, y son las funciones afines.* Las funciones lineales son los polinomios de grado 1 sin término independiente (monomios de grado 1). Algunas gráficas de otras funciones polinómicas son

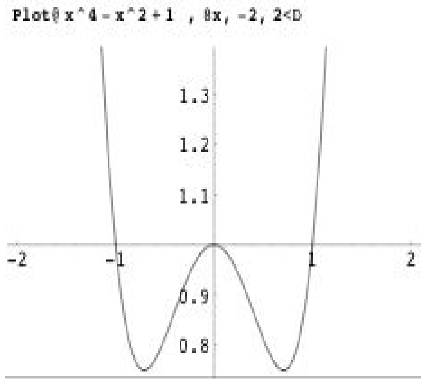








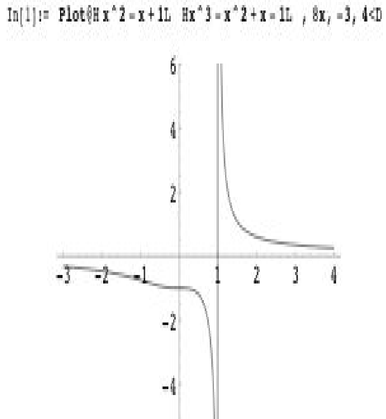


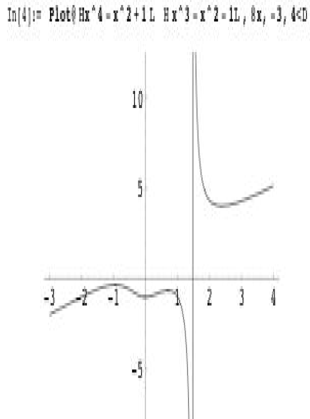


Una **función racional** es un cociente de funciones polinómicas, es decir, una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

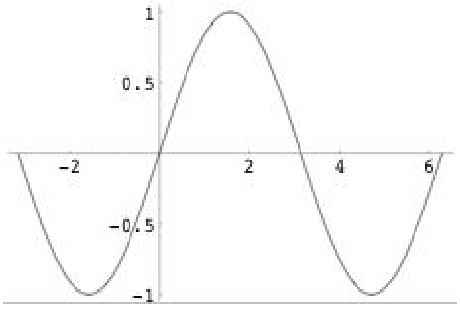
donde P y Q son polinomios. Como ejemplos:



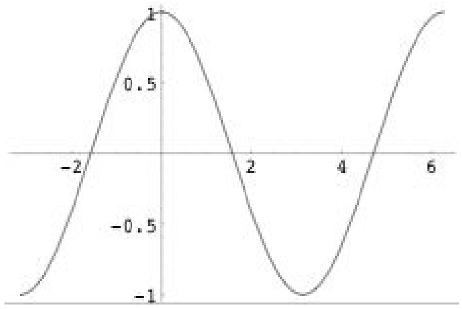


Obsérvese como la función se hace $\pm\infty$ (y, por lo tanto, no está definida) en los puntos en que el denominador se anula.

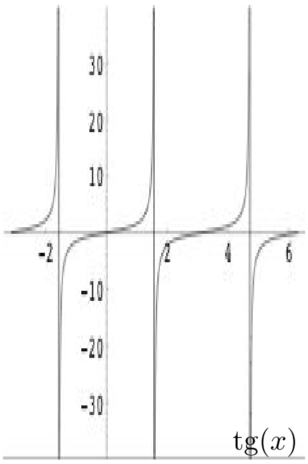
Las **funciones trigonométricas circulares** son sen, cos, tg, cot, cosec $= 1/\operatorname{sen}$ y sec $= 1/\cos$, cuyas gráficas son:



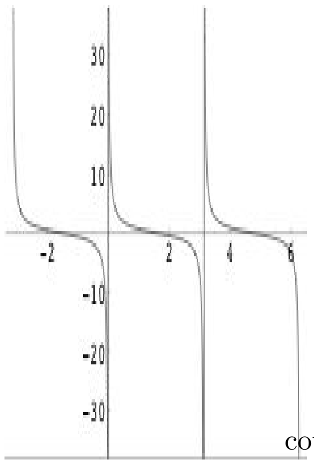
sen(x)



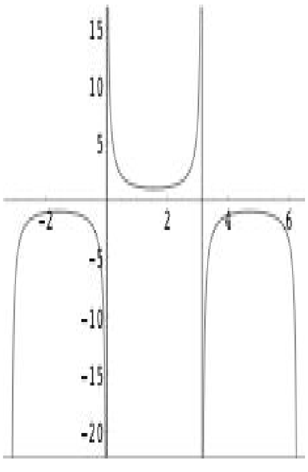
cos(x)



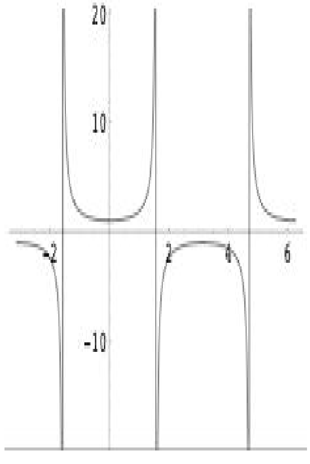
tg(x)



cot(x)



cosec(x)



sec(x)

que conviene recordar tienen las siguientes propiedades:

$$\cos(a+b) = (\cos a)(\cos b) - (\operatorname{sen} a)(\operatorname{sen} b),$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = (\operatorname{sen} a)(\cos b) + (\cos a)(\operatorname{sen} b),$$

$$\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1,$$

y, como consecuencia de las dos primeras fórmulas,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2a = 2(\operatorname{sen} a)(\cos a).$$

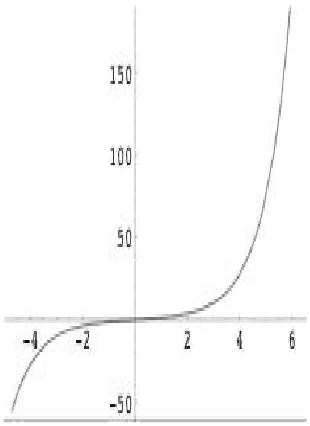
Las **funciones trigonométricas hiperbólicas** son

$$\operatorname{sh}(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

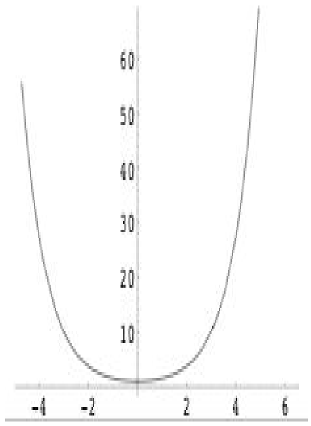
$$\operatorname{th}(x) = \tanh(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}, \quad \coth(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)},$$

$$\operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}, \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)},$$

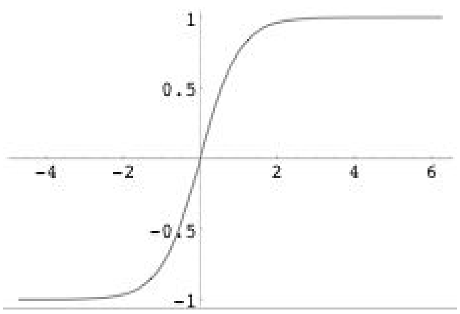
cuyas gráficas son:



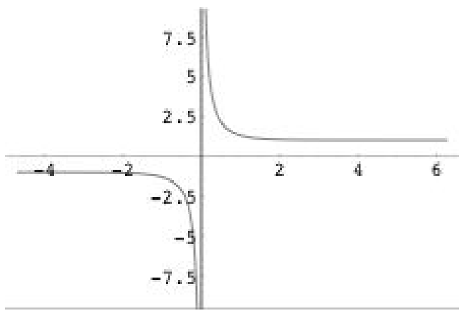
senh(x)



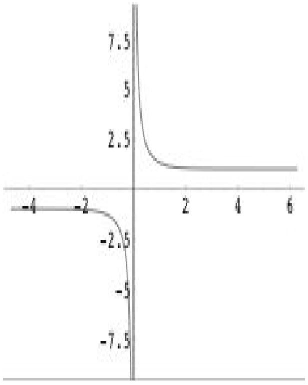
cosh(x)



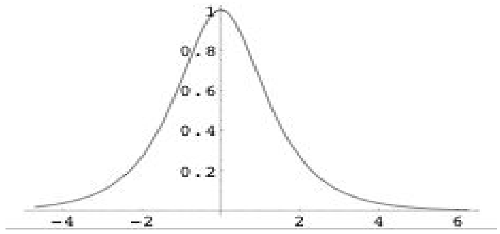
th(x)



coth(x)



cosech(x)



sech(x)

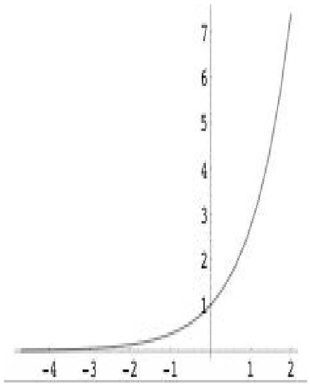
Estas funciones tienen las siguientes propiedades:

$$\mathrm{ch}(a+b) = (\mathrm{ch}\, a)(\mathrm{ch}\, b) + (\mathrm{sh}\, a)(\mathrm{sh}\, b),$$
$$\mathrm{sh}(a+b) = (\mathrm{sh}\, a)(\mathrm{ch}\, b) + (\mathrm{ch}\, a)(\mathrm{sh}\, b),$$
$$\mathrm{ch}^2\, a - \mathrm{sh}^2\, a = 1,$$

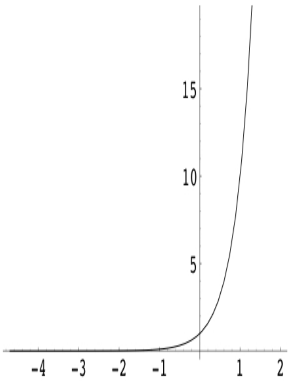
y, consecuencia de las dos primeras fórmulas es

$$\mathrm{ch}\, 2a = \mathrm{ch}^2\, a + \mathrm{sh}^2\, a, \quad \text{y} \quad \mathrm{sh}\, 2a = 2(\mathrm{sh}\, a)(\mathrm{ch}\, a).$$

Funciones exponencial y logarítmica



e^x



10^x

Ya conocido el número e, la función exponencial es e^x, y, para cualquier otro $a \in \mathbb{R}$ se puede considerar la función a^x, cuya relación con e^x veremos al recordar la definición de logaritmo.

Además, se verifica:

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

La función logaritmo de base $a > 0$, $\log_a x$ se define como la función inversa de la función a^x. En particular, $\ln x = \log_e x$ es la función inversa de la exponencial e^x y se llama logaritmo neperiano. Con más precisión:

$$\log_a x = y \text{ si y solo si } a^y = x, \text{ y, como } \ln x = \log_e x, \ \ln x = y \text{ si y solo si } e^y = x,$$

y resulta de esta definición que

$$\log_a 1 = 0 = \ln 1, \qquad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a x, \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

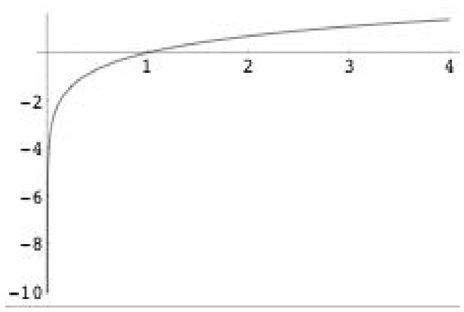
y, de la tercera propiedad, resulta que, si $y = \ln x$, $e^y = x$ y $y \log_a e = \log_a x$, de donde,

$$\log_a x = \log_a e \quad \ln x.$$

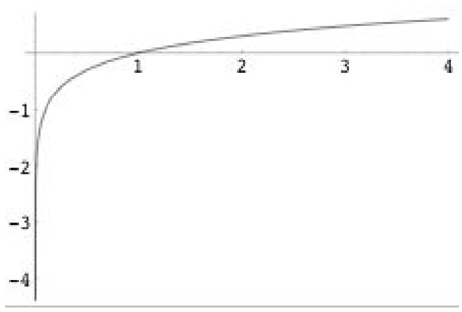
Y de la misma propiedad tercera se deduce que $\ln a^x = x \ln a$, de donde

$$a^x = e^{(\ln a)x},$$

lo que explica la relación entre las gráficas de 10^x y e^x dadas anteriormente. La gráfica del logaritmo es, como le corresponde por ser la inversa de la función exponencial, la que resulta de cambiar los ejes X e Y entre sí en la gráfica de la exponencial, así:



$\ln x$



$\log_{10} x$

Obsérvese que $a^x > 0$ para todo x, luego $\log_a x$, que es su función inversa, sólo está definida para $x > 0$, siendo $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$.

1.6 Operaciones con funciones

Entre las funciones podemos considerar las mismas operaciones que con los números reales. Dadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se definen:

- 1. La suma $f+g$ como la aplicación $f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f+g(x) = f(x)+g(x)$,
- 2. El producto fg como la aplicación $fg : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
- 3. Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, el cociente f/g como la aplicación $f/g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$,
- 4. El producto de f por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como la aplicación $\lambda f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,

- 5. En general, para cualquier operación R que se pueda hacer con números reales, se puede definir la correspondiente función R con funciones de la siguiente manera: $(R(f))(x) = R(f(x))$, así, por ejemplo, se definen:

  5.1. $f^b : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f^b(x) = (f(x))^b$.[2]

  5.2. $e^f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $e^f(x) = e^{f(x)}$.

  5.3. $\ln f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(\ln f)(x) = \ln(f(x))$.

Así, por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, entonces
$(f + g)(x) = x^2 + e^x$, $\quad (f/g)(x) = x^2/e^x$, $\quad (fg)(x) = x^2\ e^x$
$(3f + 2g - \frac{5f}{6g})(x) = 3x^2 + 2e^x - \frac{5x^2}{6e^x} = \frac{18x^2e^x+12e^{2x}-5x^2}{6e^x}$,

¡OJO!: *No confundir el producto de funciones con valores reales fg con la composición de funciones $f \circ g$. Ambas expresiones tienen sentido cuando f y g son aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pero se trata de sentidos muy diferentes. Esto, además, da lugar a dos notaciones, ambas legítimas, pero con significados totalmente distintos, que se conocen por el contexto o, si no, preguntándole al autor del escrito en que se encuentre esa notación. Se trata de f^2, Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación, f^2 puede significar $f \circ f$ ó ff, lo primero si se está componiendo funciones, y lo segundo si se está multiplicando funciones.*

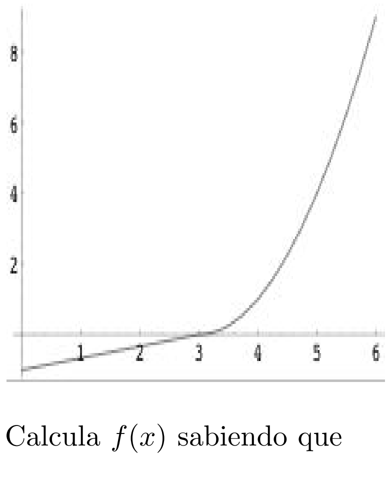
Ejercicios

1. Expresar cada una de las funciones

   $$h(x) = \operatorname{tg}(x^5), \quad h(x) = \frac{2}{6 + \cos(x)}, \quad h(x) = \frac{2\ \operatorname{sen}^2(x)}{6 + \cos^2(c)}$$

   como composición de dos funciones f y g.

2. La función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 1, & \text{si} \quad x \leq 3 \\ x^2 - 6x + 9, & \text{si} \quad x > 3, \end{cases}$ tiene la gráfica que se ve a la derecha. ¿Tiene inversa?. Si la tiene, encontrarla (**Ayuda**: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$)



3. Sea $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$. ¿Cuál es el dominio de f?. ¿Cuál es la imagen de f?. ¿Existe la inversa de f?. Encontrar el dominio más grande en el que estén definidas tanto f como f^{-1}.

4. a) Calcula $f(x)$ sabiendo que $f(x + 1) = x^2 - 6x + 10$. b) Calcula $f(x)$ sabiendo que $f(3x + 1) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

[2]Cuando $b \in \mathbb{Z}$, la expresión f^b admite dos interpretaciones, una como lo acabamos de hacer aquí, otra como la composición de f consigo mismo b veces si $b > 0$, o de la inversa de f consigo misma b veces si $b < 0$.

5. Encuentra funciones f y g de modo que $f \circ g(x) = \text{sen}(\sqrt{x^2+1})$.

6. Muestra que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

7. Sean a y b dos números reales fijos, con $a \neq 0$. Obtener la función inversa de $f(x) = a\,x + b$.

1.7 Componentes o funciones coordenadas de una función

Por definicion de aplicación (o función), una función $f : X \longrightarrow Y \times Z$ verifica que $f(x) \in Y \times Z$, es decir, $f(x)$ se escribe de la forma (y, z), con $y \in Y$, $z \in Z$. Podemos entonces definir dos funciones $f_1 : X \longrightarrow Y$, $f_2 : X \longrightarrow Z$ por $f_1(x) = y$, $f_2(x) = z$. Dicho de otra manera, como $f(x)$ es un elemento de $Y \times Z$, es un par con dos componentes (también llamadas coordenadas), la primera en Y y la segunad en Z. Definimos entonces la función $f_1 : X \longrightarrow Y$ como aquella que a cada $x \in X$ le hace corresponder la primera cocomponente de $f(x)$, y definimos $f_2 : X \longrightarrow Z$ como la funcion que a cada $x \in X$ le hace corresponder $f_2(x)$.

A las funciones f_1 y f_2 definidas a partir de $f : X \longrightarrow Y \times Z$ como lo acabamos de hacer se las llama funciones coordenadas de f.

Con esta definicion de funciones coordenadas de f se tiene que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para todo $x \in X$.

Por ejemplo, si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ es la funcion definida por $f(n) = (-n, n^2)$, entonces f_1 es la función $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f_1(n) = -n$ y f_2 es la funcion $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow N$ definida por $f_2(n) = n^2$.

La construcción anterior la aplicaremos con frecuencia a aplicaciones $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, f tiene dos funciones coordenadas $f_1 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^k$.

De manera análoga, una función $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene n funciones coordenadas asociadas $f_1 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que verifican

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^k.$$

Así, por ejemplo, la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (xy, \text{sen}(x^2), x - y)$ tiene como funciones coordenadas $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = \text{sen}(x^2)$, $f_3(x, y) = x - y$.

1.8 Sobre antiimágenes, ecuaciones y tipos de aplicaciones

Vamos a repasar los conceptos de aplicación inyectiva y suprayectiva, y de antiimagen de un punto desde el punto de vista de las ecuaciones.

¿Qué es una ecuación?. Es una expresión de la forma

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \tag{1.2}$$

en la que $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación. La expresión (1.2) se interpreta como el siguiente problema: "dado $\mathbf{y} \in Y$, encontrar todos los $\mathbf{x} \in X$ que verifican la expresión (1.2)". Los $\mathbf{x} \in X$ solución de este problema son las soluciones de la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Ahora bien, el problema que hemos entrecomillado en el párrafo anterior es equivalente al siguiente: "dado $\mathbf{y} \in Y$, encontrar todos los $\mathbf{x} \in X$ tales que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$". Pero, según la definición de antiimagen de una aplicación que dimos antes, el conjunto de los $\mathbf{x}$ del entrecomillado anterior es $\{\mathbf{x} \in X;\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} = f^{-1}(\mathbf{y})$. Es decir: *"el conjunto de las soluciones de la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$" es lo mismo que "$f^{-1}(\mathbf{y})$ "*.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 0$ tiene como solución $x = 0$. Para la ecuación $x^2 = 0$ en la forma (1.2), tengamos en cuenta que x^2 representa la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Entonces las soluciones de $x^2 = 0$ son los elementos del conjunto $f^{-1}(0) = \{0\}$.

Cuando, en la ecuación (1.2), $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}$, se dice que (1.2) es una ecuación con n incógnitas (o variables). Si $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, se dice que (1.2) es un sistema de m ecuaciones con n incógnitas (o variables). Así, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2 + 2y - \operatorname{sen} z & = & 0 \\ 4x + 3y & = & 1 \end{array}\right\}$$

es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que se corresponde con la expresión (1.2) cuando $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (3x^2 + 2y - \operatorname{sen} z,\ 4x + 3y)$ e $\mathbf{y} = (0, 1)$.

Habitualmente (pero no siempre), la solución de un sistema de ecuaciones existe si el número de ecuaciones es menor o igual que el de incógnitas y no existe cuando el número de ecuaciones es superior al de incógnitas. Cuando la solución existe, para que sea única hace falta que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas.

¿Qué tienen que ver la existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación como (1.2) con la suprayectividad e inyectividad de la aplicación f?.

Que f sea suprayectiva quiere decir que para todo $\mathbf{y} \in Y$ existe un $\mathbf{x} \in X$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, es decir (recordando la definición dada hace un momento de la solución de una ecuación), f *es suprayectiva si para todo $\mathbf{y} \in Y$ la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene solución.*

Que f sea inyectiva quiere decir que para todo punto en la imagen de f tiene una única antiimagen, es decir, que para todo $\mathbf{y} \in f(X)$ existe un único $\mathbf{x} \in X$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Es decir (recordando la definición dada hace un momento de la solución de una ecuación), f *es inyectiva si para todo $\mathbf{y} \in f(X) \subset Y$ la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene solución única.*

Juntando estas dos observaciones tenemos que f *es biyectiva si para todo $\mathbf{y} \in Y$ la ecuación $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene solución única.*

Ejercicios

Para cada una de las funciones f, los números $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y los elementos $b \in \mathbb{R}^n$ siguientes, encontrar $f^{-1}(a)$ o $f^{-1}(b)$, según los casos,

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$; $a = 1$.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $a = 4$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + 3y$; $a = 2$.

4. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z, x + y + z)$; $b = (1, 1, 1)$.

5. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z)$; $b = (1, 1)$.

1.9 Solución gráfica de ecuaciones

Como vimos en la sección 1.2, una ecuación (para una variable real) viene dada por una expresión de la forma

$$f(x) = a \text{ siendo } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ una aplicación,} \tag{1.3}$$

y el problema de resolver la ecuación consiste en encontrar los valores de x para los que esa expresion sea correcta.

¿Cómo encontrar las soluciones de la ecuación (1.3) cuando se conoce la gráfica de f?.

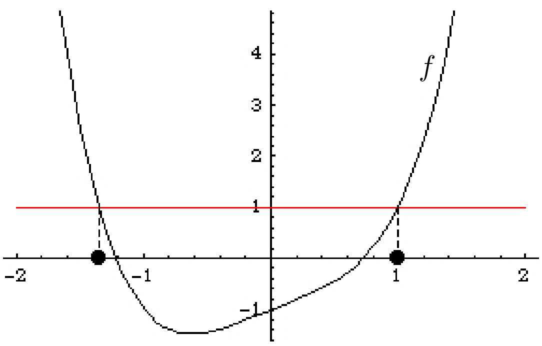
El número x_0 es una solución de (1.3) si su imagen por f es a. En la gráfica de f, la imagen $f(x_0)$ se obtiene levantando una vertical desde x_0 y, en el punto donde esa vertical encuentra a la grafica de f, trazando una horizontal, de modo que $f(x_0)$ es el punto del eje Y donde esa horizontal lo corta.

Por lo tanto, las soluciones de (1.3) se obtienen trazando una recta horizontal que pase por el punto $y = a$ y viendo donde esa horizontal corta a la gráfica de la funcion f. Las soluciones son enotnces los puntos del eje X que se obtienen como proyección de esas intersecciones.

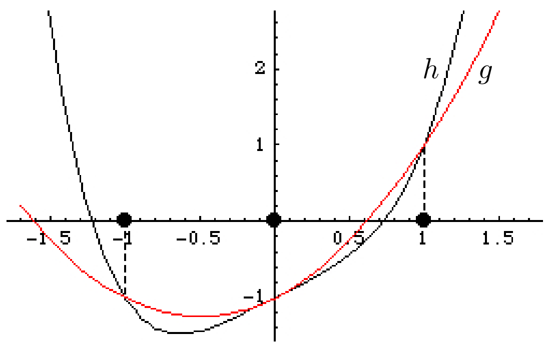
Otras veces, unaa ecuación puede estar escrita bajo la forma

$$h(x) = g(x) \text{ siendo } h, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ aplicaciones.} \tag{1.4}$$

Las soluciones de (1.4) son los x_0 para los que (1.4), y, pensando del mismo modo que lo hemos hecho para deducir el modo de encontrar las soluciones en la ecuación (1.3), se ve que las soluciones de (1.4) se obtiene proyectando sobre el eje X las intersecciones de las graficas de las funciones h y g.



Soluciones de $f(x) = 1$



Soluciones de $h(x) = g(x)$

1.10 Funciones polinómicas de varias variables

Las **funciones polinómicas** (y en particular las **lineales y afines**) también se pueden definir **para varias variables**. Así, una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es un polinomio de grado p si se puede escribir de la forma

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i \leq j=1}^{n} a_i j x_i x_j + ... + \sum_{i_1 \leq ... \leq i_p = 1}^{n} a_{i_1 \ldots i_p} \; x_{i_1} \ldots x_{i_p},$$

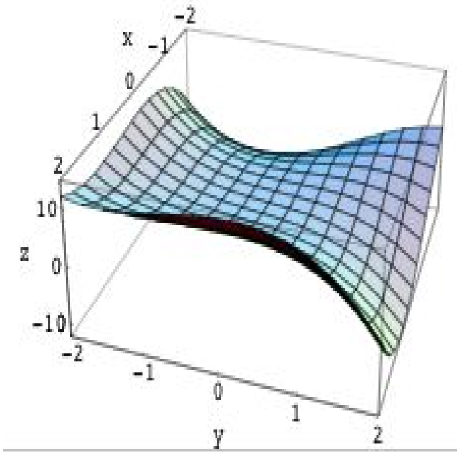
obsérvese que, en la escritura habitual, en lugar de repetir coordenadas, se escribirá, potencias, así, por ejemplo

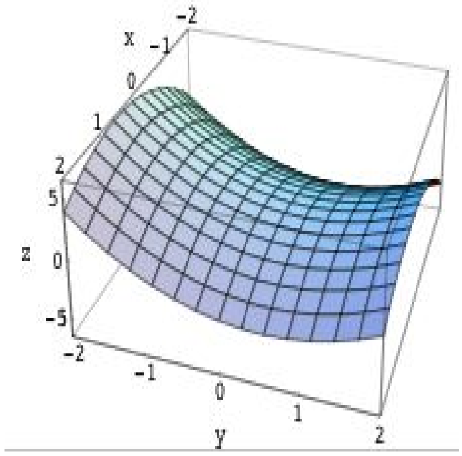
$$3 + 4x + 2y - 3xy + 4x^2 - 5y^2 + 7xy^2 + 5x^2 y$$

es un polinomio de dos variables de grado 3 que, en el modo de escribir de la fórmula anterior se expresaría:

$$3 + 4x + 2y - 3xy + 4 \; x \; x - 5 \; y \; y + 7 \; x \; y \; y + 5 \; x \; x \; y.$$

Por lo tanto, en el modo de escribir corriente, el grado de un polinomio de varias variables es el del monomio de mayor grado, y el grado de un monomio es la suma de los coeficientes de las incógnitas de ese monomio. Un *polinomio se dice que es homogéneo si cada uno de los monomios que lo constituyen son del mismo grado.* A continuación se dibujan las gráficas de dos ejemplos de polinomios de dos variables:



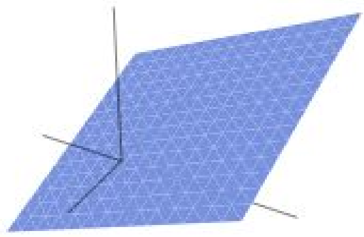


Gráfica de $x^3 - y^3 + x^2 y - xy^2 - xy + x^2 - y + x$ Gráfica de $y^2 - x^2 - y + x$

Como en el caso de una variable, una función afín es una función polinómica de grado 1, es decir, una función de la forma $f(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n + b$, y una función lineal es un polinomio homogéneo de grado 1, es decir, una función de la forma $f(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$. De nuevo, una función lineal verifica las propiedades

(ln1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$,

(ln2) $f(\lambda x) = \lambda \; f(x)$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, y para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y su gráfica es la de un hiperplano que pasa por el origen (el punto $(0, 0, ..., 0)$), mientras que la gráfica de una función afín es la de un hiperplano cualquiera. A continuación se muestran las gráficas, para dos variables, de una función lineal y de otra afín.



Gráfica de una función lineal

Gráfica de una función afín

El siguiente paso en complicación consiste en considerar aplicaciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, es decir, funciones de varias variables con imágenes en varias variables. Como ya vimos en la sección 1.7, una función de este tipo se puede escribir de la forma

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)).$$

La complicación de la funcion f provendrá de la complicacion de las funciones f_1, ... , f_m. Por lo tanto, las funciones f más sencillas serán aquellas en las que f_1, ..., f_m sean polinomios. Cuando estos polinomios son de primer grado, las funciones f reciben el mismo nombre que recibían las correspondientes funciones con valores en una variable. Así:

Una *aplicación* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *se dice que es afín* si lo son cada una de sus funciones coordenadas f_1, ... , f_m; es decir, si sus funciones coordenadas son polinomios de grado 1.

Una *aplicación* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *se dice que es lineal* si lo son cada una de sus funciones coordenadas f_1, ... , f_m; es decir, si sus funciones coordenadas son polinomios homogéneos de grado 1.

Capítulo 2

Matrices y aplicaciones lineales

2.1 Suma y producto por un escalar en $\mathbb{R}^n$

Dados $v = (v_1, ..., v_n)$, $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen

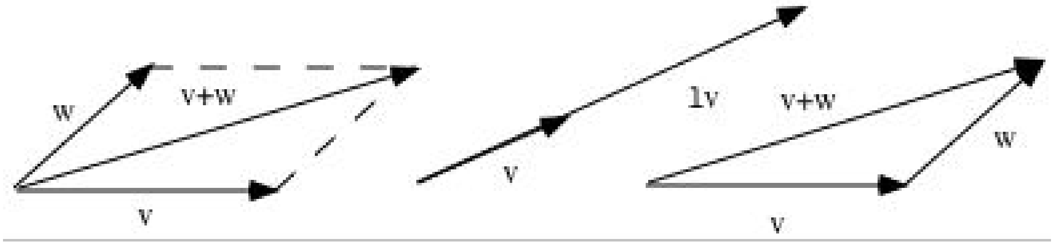
Suma de vectores: $v + w = (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$,

Producto de un escalar por un vector: $\lambda v = (\lambda\ v_1,\ ...\ , \lambda\ v_n)$,

Dado un vector v, se llama **vector opuesto** a $-v = (-1)v$.

Usando las operaciones anteriores, se define la **diferencia de vectores**: $v - w = v + (-1)w = (v_1 - w_1, ..., v_n - w_n)$.

Se demuestra que esta definición es equivalente a la siguiente definición gráfica:



$v+w$ es el vector que se construye a partir de v y w siguiendo la regla del paralelogramo: $v + w$ es el vector que une el origen de $\mathbb{R}^n$ con el vértice opuesto del paralelogramo formado por v, w y dos rectas paralelas a estos vectores, o, equivalentemente, es el vector que une el origen de $\mathbb{R}^n$ con el extremo del vector w cuando el origen se pone en el extremo de v.

λv es el vector que tiene la misma dirección que v si $\lambda > o$, la opuesta si $\lambda < 0$, y cuyo módulo es λ veces el de v.

Obsérvese que las operaciones suma y producto verifican las siguientes propiedades:

(EV1) $(v + w) + x = v + (w + x)$ para cualesquiera $v, w, x \in V$ (asociativa),

(EV2) $v + 0 = 0 + v = v$ para cualquier $v, \in V$ (existencia de elemento neutro: 0),

(EV3) $v - v = -v + v = 0$ para cualquier $v, \in V$ (existencia de elemento opuesto: $-v$),

(EV4) $v + w = w + v$ para cualesquiera $v, w \in V$ (conmutativa),

(EV5) $\lambda\ (v + w) = \lambda\ v + \lambda\ w$ y $(\lambda + \mu)\ v = \lambda\ v + \mu\ v$ para cualesquiera $v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (distributivas),

(EV6) $1\ v = v$ para cualquier $v \in V$, (EV7) $(\lambda\ \mu)\ v = \lambda\ (\mu\ v)$ para cualquier $v \in V$.

2.2 Matrices

Según vimos en la sección **??**, los ejemplos más sencillos de funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son aquellas cuyas funciones coordenadas $y_1(x_1, ..., x_n), \ldots, y_m(x_1, ..., x_n)$ son polinomios en las indeterminadas $x_1, ..., x_n$. De entre ellos, dejando aparte el caso trivial de las funciones constantes, el caso más sencillo es aquel en el que las funciones coordenadas son polinomios homogéneos de grado 1., es decir, el caso de las funciones lineales (que introdujimos en el capítulo 1). La expresión general de una función de este tipo es:

$$f(x_1, ..., x_n)$$
$$= (a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n,\ \ldots,\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n),$$

de modo que, si ahora escribimos los elementos de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{R}^m$ en forma de columna y no de fila, tendríamos que la aplicación f se puede describir con el siguiente diagrama

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

de modo que la aplicación f queda totalmente determinada por el conjunto ordenado de números

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

que actúan sobre un elemento arbitrario $(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ según la regla dada por (2.1).

Este es uno de los ejemplos clasicos que muestran el interés de introducir un concepto nuevo llamado matriz.

Una **matriz** $m \times n$ **es un conjunto ordenado de** $m.n$ **números** escritos de la forma (2.2)

En una matriz se distinguen las **filas**

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in}) \quad i - \text{ésima fila}$$

y las **columnas**

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \qquad j - \text{ésima columna.}$$

Se dice que una **matriz** es **cuadrada** si el número de filas es igual al de columnas $(m = n)$.

Se llama **diagonal principal de una matriz cuadrada** al conjunto de los elementos de la forma $a_{11}, ..., a_{nn}$.

Una **matriz** cuadrada se dice que es **diagonal** si sus únicos elementos no nulos son los de la diagonal principal (i.e. si $a_{ij} = a_i \delta_{ij}$) [1].

Un caso especial de matriz diagonal es la **matriz identidad**, que es aquélla en la que los elementos de la diagonal principal son el 1 y todos los demás el 0 (i.e., la matriz identidad Id (que a veces denotaremos también por I) es aquella cuyos elementos son $a_{ij} = \delta_{ij}$).

Una **matriz** cuadrada se dice que es **triangular** si todos los elementos de la misma que están por encima (o por debajo) de la diagonal principal son nulos; es decir, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ es triangular si $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$ (o siempre que $i < j$).

La **matriz traspuesta** A^t de una matriz A es la que se obtiene de a cambiando filas por columnas, es decir si $A = (a_{ij})$ y $A^t = (b_{ij})$, entonces A^t es la traspuesta de A si y solo si $b_{ij} = a_{ji}$.

Una **matriz** cuadrada se dice que es **simétrica** si es igual a su traspuesta (i.e. $a_{ij} = a_{ji}$) y **antisimétrica** si es igual a la opuesta de su traspuesta (i.e. $a_{ij} = -a_{ji}$).

Una matriz B se dice que es una **submatriz** de A si se obtiene de A quitándole algunas filas y/o columnas.

Operaciones con matrices.

• Se define la **suma** de dos matrices como la matriz que resulta de sumar sus elementos uno a uno, así:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• El **producto por un escalar** se define multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el escalar, así

$$\lambda\ A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

• El **producto de dos matrices** A de tipo $m \times r$ y B de tipo $r \times n$ (en ese orden) se define como la matriz $C = A\ B$ cuyos elementos c_{ij} se obtienen multiplicando, por orden, los

[1] δ_{ij} es un símbolo, llamado delta de Kronecker, cuyo significado es el siguiente:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.$$

elementos a_{ik} de la fila i de la matriz A por los elementos b_{kj} de la columna j de la matriz B y sumando a continuación, es decir,

$$\text{si } A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ \text{ entonces } AB = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}.$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 2\times 1 + 3\times 5 & 1\times 2 + 2\times 4 + 3\times 6 \\ 4\times 3 + 5\times 1 + 6\times 5 & 4\times 2 + 5\times 4 + 6\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 47 & 64 \end{pmatrix}.$$

Es importante observar que el *producto de matrices no es conmutativo*, ni siquiera cuando ambas matrices son cuadradas. Es decir, en general, AB y BA serán matrices diferentes.

Sin embargo, si que se verifican las siguientes **propiedades del producto de matrices**:
$(AB)C = A(BC)$ (asociativa),
$A\ I = I\ A = A$, siendo I la matriz identidad,
$A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva),
$(A^t)^t = A$,
$(AB)^t = B^t A^t$,
$(A + B)^t = A^t + B^t$ y
$(\lambda\ A)^t = \lambda\ A^t$.

Dada una matriz A, se llama matriz **inversa** de A a una matriz A^{-1} que verifique $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = Id$.

Una **matriz** A se dice que es **invertible o regular** si admite una inversa. Puesto que ha de ser posible hacer tanto el producto $A\ A^{-1}$ como el producto $A^{-1}\ A$, y, además, ambos han de ser iguales, *la matriz A ha de ser cuadrada para que sea invertible.* Además, *si una matriz es regular, su inversa es única.* Se puede saber si una matriz es invertible o no calculando su determinante. Vamos a definirlo.

Para una matriz 2×2, se define su **determinante** por la expresión:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Para una matriz $n \times n$ con $n \geq 3$, la definición se hace por inducción a partir del determinante definido cuando $n = 2$. Así, si $M_{ij}(A)$ es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de A, definimos:

$$c_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$$

y

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1}(A) + a_{i2}c_{i2}(A) + ... + a_{in}c_{in}(A),$$

que se llama desarrollo del determinante por la i-ésima fila, o, equivalentemente,

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j}(A) + a_{2j}c_{2j}(A) + ... + a_{nj}c_{nj}(A),$$

que se llama desarrollo del determinante por la j-ésima columna.

Así, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1(0\times 6-(-1)\times 1))-(-1)(1\times 6-(-1)\times 2)+3(1\times 1-0\times 2)=12.$$

Algunas **propiedades del determinante de una matriz** son:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda\, a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \lambda\, a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Las dos primeras propiedades se llaman de linealidad respecto de las columnas, y la tercera, de antisimetría en las columnas. Además también se verifica que

$$\det(A^t) = \det(A),$$

de donde se deduce que *las propiedades anteriores para las columnas también con ciertas para las filas.* También se verifica que

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\ \det(B).$$

El siguiente resultado es fundamental: *"Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero".* Vamos a demostrar una de las afirmaciones que contiene este resultado, en concreto, que si una matriz tiene inversa, entonces su determinante es distinto de cero. En efecto: si existe A^{-1} tal que $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = Id$, tomando determinantes, $\det(A)\ \det(A^{-1}) = \det(A^{-1}\ A) = \det(Id) = 1$, de donde $\det(A) \neq 0$, y, además,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Otras consecuencias (y, muchas, simples reescrituras) de las propiedades anteriores son:

1. Si A tiene una fila de ceros, $\det(A) = 0$.

2. Si dos filas o dos columnas de A son proporcionales (o iguales), $\det(A) = 0$.
3. Si A es triangular, $\det(A)$ es igual al producto de los coeficientes de la diagonal principal.
4. $\det A = \det(A^t)$.
5. Si B se obtiene al multiplicar una sola fila o una sola columna de A por λ, $\det(B) = \lambda \det(A)$.
6. Si B se obtiene de A al intercambiar dos filas o dos columnas de A, $\det(B) = -\det(A)$.
7. Si B se obtiene de A al sumar a una fila de A una combinación lineal de las restantes filas de A, $\det(B) = \det(A)$.
8. Si B se obtiene de A al sumar a una columna una combinación lineal de las columnas de A, $\det(B) = \det(A)$.

Cálculo de la matriz inversa *Si una matriz $A = (a_{ij})$ es invertible, su inversa es la matriz $A^{-1} = (b_{ij})$ cuyas componentes son*

$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} c_{ji}(A).$$

Así, por ejemplo, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ es:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

1. Sean A y B dos matrices de orden 4×5 y C, D, E y F matrices de ordenes 5×2, 4×2, 5×2 y 5×4, respectivamente. Determina cuáles de las siguientes expresiones matriciales están bien definidas y, en tal caso, da el orden de la matriz resultante. (i) BA , (ii) $AC + D$, (iii) $AE + B$, (iv) $AB + B$, (v) $E(A + B)$, (vi) $E(AC)$, (vii) $E^t A$, (viii) $(A^t + E)D$.

2. Dadas dos matrices A y B, demuestra que si AB y BA están bien definidas, entonces AB y BA son cuadradas.

2.3 La matriz de una aplicación lineal

Vimos al comienzo del apartado anterior que una de las utilidades de las matrices era la posibilidad de describir con ellas las aplicaciones lineales. En este apartado vamos a estudiar esta relación entre matrices y aplicaciones lineales con más detalle.

Dada una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_m),$$

cuyas funciones coordenadas tienen la expresión

$$\begin{aligned} y_1(x_1, ..., x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2(x_1, ..., x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ y_m(x_1, ..., x_n) &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

se llama matriz asociada a f a la matriz F de tipo $m \times n$ formada por los coeficientes de los polinomios de la expresión anterior

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

que tiene la propiedad de que

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

es decir, si escribimos el vector $x = (x_1, ..., x_n)$ en forma de matriz columna $X = (x_1 \; ... \; x_n)^t$, entonces $f(x) = FX$.

Las ventajas de este modo de representación son: 1) facilita el cálculo, 2) todas las operaciones con aplicaciones lineales se corresponden perfectamente con las mismas operaciones entre matrices, así:

Si F es la matriz $m \times n$ de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y G la matriz $p \times m$ asociada a una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, entonces:

a) La matriz asociada a $f + g$ es $F + G$,

b) La matriz asociada a λf es λF,

c) La matriz asociada a $g \circ f$ es GF

d) f es biyectiva si y sólo si F es regular. Si f es biyectiva y lineal f^{-1} también, y la matriz asociada a f^{-1} es F^{-1}.

Otro modo de obtener la matriz de una aplicación lineal es el siguiente:

Sean $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Si f es la aplicación descrita por (2.3) o, equivalentemente, por (2.5), se tiene, sustituyendo la expresión de los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ en (2.3):

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}), \\ f(e_2) &= (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}) \\ \cdots\cdots & \cdots \\ f(e_n) &= (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}), \end{aligned}$$

lo que muestra que la matriz F de la aplicación lineal f se puede obtener escribiendo, como columnas ordenadas, las imágenes de los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$.

Veamos algunos ejemplos:

Ej.1) Determina las coordenadas de la imagen del vector $(1, 0, -1)$ por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que tiene por matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Bastará con hacer actuar la matriz sobre el vector, así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ej.2) Determina las coordenadas de la imagen del vector $(1, 3, -1)$ por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que lleva los vectores e_1, e_2, e_2 en los vectores $(1, 0, 0), (1, 2, 1), (2, 0, 1)$ respectivamente.

Primero hay que calcular la matriz de esa aplicación, que, como indicamos antes, se obtiene poniendo como columnas de la matriz las componentes de las imágenes de e_1, e_2, e_2, luego la matriz de la aplicación anterior es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y la imagen del vector $(1, 3, -1)$ por esta aplicación es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

1. Determina las coordenadas de la imagen del vector (1,2,3) por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

   a) f que tiene por matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) g que lleva la base canónica en los vectores $\{(1,1,0).(1,-1,0),(0,0,1)\}$

c) h que lleva la base canónica en los vectores $\{(1,0,-1).(1,0,1),(0,1,0)\}$.

Comprueba la correspondencia entre las operaciones definidas sobre las funciones lineales y las definidas sobre sus matrices asociadas (es decir, las propiedades a), b), c) y d) de la sección 2.3) en las aplicaciones f, g, y h definidas en los apartados anteriores.

2.4 k-planos vectoriales

Diremos que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es **combinación lineal** de los vectores $v_1, ..., v_r$ si existen $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$. Los $\lambda_1, ..., \lambda_r$ se llaman **coeficientes** de la combinaciónón lineal.

Por ejemplo, el vector $(2,2,1)$ es una combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$, porque se puede escribir

$(2,2,1) = 2(1,1,0) + (0,0,1)$.

En este caso, los coeficientes de la combinación lineal son 2 y 1.

Se llama **espacio vectorial generado por** $v_1, ..., v_r \in \mathbb{R}^n$ al conjunto V de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores $v_1, ..., v_r$. Se dice también que $v_1, ..., v_r$ son un **sistema generador de** V **o que generan** V. Se usará la notación $V =< \{v_1, ..., v_r\} >$ ó $V = \text{span}\{v_1, ..., v_r\}$ para indicar que V es el espacio vectorial generado por $v_1, ..., v_r$.

Por ejemplo, el espacio vectorial generado por los vectores $(1,-1,0)$ y $(0,1,1)$ es el espacio V formado por todas las combinaciones lineales $\lambda(1,-1,0) + \mu(0,1,1)$, donde λ y μ varían en el conjunto de todos los números reales, es decir

$V = \{(\lambda, -\lambda + \mu, \mu);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$,

lo que se puede escribir también así

$V = \{(x, -x + z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z);\ y = -x + z\}$.

Se demuestra que V es un espacio vectorial si y solo si verifica que para cualesquiera $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

$$v + w \in V \quad \text{y} \quad \lambda v \in V. \tag{2.6}$$

En particular, tomando $\lambda = 0$, resulta que

$0 := (0, ..., 0)$ *pertenece a cualquier subespacio vectorial* V; y,

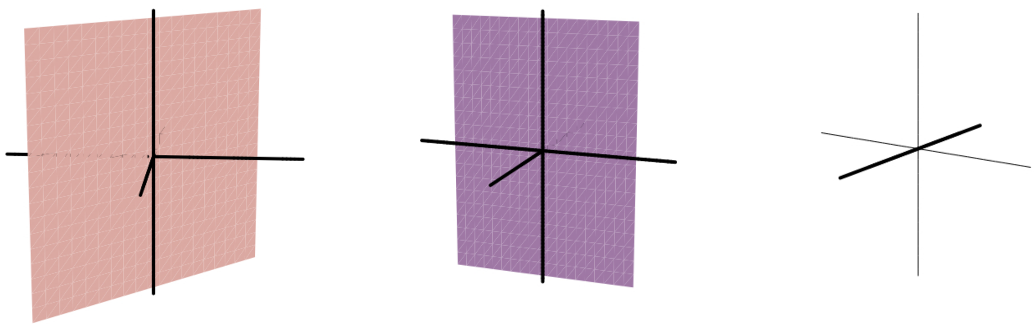
si $v \in V$*, la recta en la dirección de* v *que pasa por el origen (es decir,* $\{\lambda\ v;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$*) está contenida en* V*.*

Obsérvese que denotamos por 0 tanto el número 0 como el vector $(0, ..., 0)$.

Es fácil ver que la condición (2.6) es equivalente a

$$\lambda v + \mu w \in V \quad \text{para cualesquiera } v, w \in V \text{ y } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Por ejemplo, son espacios vectoriales los conjuntos $\mathbb{R}^3$, $W = \{(y, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \{(0,0)\}$.



W $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R} \times \{(0,0)\}$

Se dice que el conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_r\}$ es linealmente independiente (l.i.), o, también, que los **vectores** $v_1, ..., v_r$ **son linealmente independientes** si

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0 \text{ implica } \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0, \tag{2.8}$$

es decir, solo hay una combinación lineal de los vectores $v_1, ..., v_r$ que da 0, y esta corresponde al caso en que todos los coeficientes de la combinación lineal son cero.

Se dice que el conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_r\}$ es linealmente dependiente (l.d.), o, también, que los **vectores** $v_1, ..., v_r$ **son linealmente dependientes** si no se verifica la propiedad (2.8), es decir, si existen $\lambda_1, ..., \lambda_r$, no todos nulos, tales que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0$, y *esto es equivalente* a que uno de los vectores v_i se pueda combinación lineal de los demás $v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_r$.

Así, por ejemplo, vamos a ver si los vectores $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$ y $(1, 0, 1, 0)$ son o no l.i.. Para ello tomamos una combinación lineal de ellos e igualamos a 0:

$$\lambda(1, 1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0, 1) + \nu(1, 0, 1, 0) = 0,$$

de donde resultan las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda + \nu & = 0 \\ \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda + \nu & = 0 \\ \mu & = 0 \end{array}\right\},$$

que tienen como solución única $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, luego se trata de vectores linealmente independientes.

En cambio, si consideramos los vectores $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$ y $(1, 0, 1, -1)$, tomando una combinación lineal e igualando a 0,

$$\lambda(1, 1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0, 1) + \nu(1, 0, 1, -1) = 0, \tag{2.9}$$

obtenemos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda + \nu & = 0 \\ \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda + \nu & = 0 \\ \mu - \nu & = 0 \end{array}\right\},$$

que tienen solución cualesquiera λ, μ, ν que verifiquen $\lambda = -\nu = -\mu$, y basta tomar $\mu \neq 0$ para tener la igualdad (2.9) con coeficientes no nulos.

Se llama **k-plano vectorial de** $\mathbb{R}^n$ o espacio vectorial de dimensión k al espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por k vectores linealmente independientes, que se llaman **base del k-plano vectorial**. Por lo tanto, una base de un espacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes y que generan V. Se demuestra dos bases de un mismo subespacio vectorial tienen el mismo número de elementos, por lo que la definición de dimensión que acabamos de dar es correcta.

Si $u_1, ..., u_k$ es una base cualquiera de un k-plano vectorial V y $v \in V$, se llaman **coordenadas o componentes de v respecto de la base** $\{u_1, ..., u_k\}$ a los números reales $v_1, ..., v_k$ tales que $v = v_1u_1 + ... + v_ku_k$. Se demuestra que estas componentes son únicas para cada vector una vez fijada la base.

Resulta de la observación anterior que la dimensión de un k-plano vectorial está de acuerdo con la noción de dimensión que dimos en el capítulo I como número mínimo de variables necesario para describir los elementos de un conjunto. En efecto, si V es un k-plano de base $u_1, ..., u_k$, todo elemento $v \in V$ se puede describir por sus k coordenadas $v_1, ..., v_k$.

El ejemplo más importante de base es el conjunto de vectores $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (01, 0, ..., 0)$, ... , $e_n = (0, ..., 0, 1)$, que forman una base de $\mathbb{R}^n$ que se llama **base canónica**. Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n.

Vamos a comprobar que la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base:

• $e_1, ..., e_n$ generan $\mathbb{R}^n$. En efecto, todo $v = (v_1, ..., v_n)$ se puede escribir como $v = v_1e_1 + ... + v_ne_n$.

• son linealmente independientes: $\lambda_1e_1 + ... + \lambda_ne_n = 0$ implica $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0$, lo que da $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

$\mathbb{R}^n$ tiene otras muchas bases, por ejemplo:

$$(1, 1, 0, ..., 0),\ (1, -1, 0, ..., 0),\ (1, 0, 1, 0, ..., 0),\ (1, 0, 0, 1, 0, ..., 0), ..., (1, 0, ..., 0, 1).$$

Entre los ejemplos de subespacio vectorial descritos antes, W y $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ tienen dimensión 2, y $\mathbb{R} \times \{(0, 0)\}$ tiene dimensión 1.

Vamos a encontrar una base de cada uno de estos espacios. Los vectores del espacio W son aquellos de la forma (y, y, z), luego pueden escribirse en la forma

$$(y, y, z) = y(1, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$

luego todo vector de W es combinación lineal de $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, luego estos vectores son un sistema de generadores de W. Para ver que son base, solo falta comprobar que son linealmente independientes, lo que se deja al lector. Puesto que W tiene una base formada por dos vectores, tiene dimensión 2.

Análogamente, los vectores de $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ son de la forma $(0, y, z)$ que se pueden escribir como $(0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, y se comprueba, como antes, que $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ forman una base de $\{0\} \times \mathbb{R}^2$.

También de modo análogo se ve que el vector $(1, 0, 0)$ es una base de $\mathbb{R} \times \{(0, 0)\}$.

Proposición *Si V es un m-plano vectorial, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) m vectores $e_1, ..., e_m$ de V son linealmente independientes,
(ii) m vectores $e_1, ..., e_m$ de V son un sistema de generadores de V, y
(iii) m vectores $e_1, ..., e_m$ de V son una base de V.

Como consecuencia de esto, para comprobar que un conjunto de m vectores son una base de un espacio vectorial V de dimensión m, bastará con probar, bien que son linealmente independientes, o bien que son un sistema de generadores. Veamos dos ejemplos:

Ej.1) Los vectores $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$ y $(0,1,1)$ son 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ que verifican que

$$\lambda(1,1,0) + \mu(1,-1,0) + \nu(0,1,1) = 0$$

implica

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda - \mu + \nu & = 0 \\ \nu & = 0 \end{array}\right\},$$

y, por tanto, $\lambda = -\mu = \nu = 0$, luego $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$ y $(0,1,1)$ son l.i. y, por la proposición anterior, son una base de $\mathbb{R}^3$.

Ej.2) Veremos más adelante que se demuestra que el siguiente espacio $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ x+y-z=0,\ x+y+w=0\}$ tiene dimensión 2. Sabiendo esto, por la proposición anterior, para encontrar una base de W bastará con encontrar un sistema de generadores, lo que hacemos despejando, de las ecuaciones que definen W, dos variables en función de las otras dos, así:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y-z & = 0 \\ x+y+w & = 0 \end{array}\right\}, \quad z = x+y \text{ y } w = -x-y,$$

de modo que $W = \{(x,y,x+y,-x-y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$, y

$$(x,y,x+y,-x-y) = x(1,0,1,-1) + y(0,1,1,-1),$$

de donde se deduce que $(1,0,1,-1)$ y $(0,1,1,-1)$ son dos vectores que son un sistema de generadores del espacio vectorial W de dimensión 2, y, por lo tanto, una base de W.

2.5 Más propiedades de las matrices

El **rango de una matriz A de tipo** $m \times n$ es el mayor p tal que existe una submatriz regular B de tipo $p \times p$. Así, por ejemplo:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3, \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ -7 & 9 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

El siguiente resultado es especialmente práctico:

r vectores de $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes si y solo si la matriz formada con las componentes de esos vectores en una base dada tiene rango r (es decir, tiene el máximo rango posible).

Dicho de otra manera: *Los vectores* $v_1 = (v_1^1, ..., v_1^n)$,...,$v_r = (v_r^1, ..., v_r^n)$ *de* V *son linealmente independientes si y solo si la matriz* $\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_r^n \end{pmatrix}$ *tiene rango* r.

Se deduce de aquí que un conjunto de n vectores son una base de un n-plano vectorial V si y solo si la matriz de sus componentes es regular, o, lo que en este caso es equivalente, tiene rango máximo.

También se deduce que el k-plano vectorial generado por r vectores $\{v_1, ..., v_r\}$ coincide con el espacio vectorial generado por todos los vectores de entre los $\{v_1, ..., v_r\}$ que sean linealmente independientes, ya que el resto de los vectores de $\{v_1, ..., v_r\}$ están incluidos entre las combinaciones lineales de los que sean linealmente independientes. Por lo tanto, *la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores* $\{v_1, ..., v_r\}$ *coincide con el rango de la matriz de sus componentes.*

Veamos algunos ejemplos de aplicación:

Ej.1) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(2, 1, 0, 2)$?.

La dimensión del espacio generado por $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(2, 1, 0, 2)$ es la del número de vectores linealmente independientes que hay entre esos tres, que, según el resultado anterior, coincide con el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que se deja al lector comprobar que es 2, luego el espacio generado por esos vectores es 2.

Ej.2) Los vectores $(2, 0, 0)$, $(1, 3, 0)$ y $(2, 2, 1)$, ¿forman una base de $\mathbb{R}^3$?.

Como son 3 y están en un espacio vectorial de dimensión 3, bastará ver que son l.i., y para saber si lo son bastará con calcular la matriz de sus componentes

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$$

y, por lo tanto, son l. i., y base de $\mathbb{R}^3$.

2.6 Más sobre aplicaciones lineales y matrices

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal, *el espacio imagen* $f(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio vectorial de* $\mathbb{R}^m$, precisamente el generado por las imágenes de la base de $\mathbb{R}^n$. **La dimensión de $f(\mathbb{R}^n)$ se llama rango de f.**

El conjunto $f^{-1}(0)$ se llama núcleo de f. Este conjunto *es un espacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$.

Como ya hicimos notar en el capítulo 1 a propósito de la antiimagen de un punto por una función, $f^{-1}(0)$ es el conjuntode vectores v de $\mathbb{R}^n$ que son solucion del sistema de ecuaciones

$f(v) = 0$. Un tal sistema de ecuaciones puede no tener ninguna solución, una o muchas. Consideremos dos ejemplos de tales sistemas de ecuaciones con muchas soluciones.

$$\left.\begin{cases} x - y - z + w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}\right\}. \tag{2.10}$$

Ambos sistemas de ecuaciones tienen infinitas soluciones, pero tenemos la sensación de que el primer sistema tiene más soluciones que el segundo. ¿Cómo medir ese "tener más", cuando ambos conjuntos son infinitos?. Nos ayuda a ello la propiedad que acabamos de enunciar de que el núcleo de una aplicación lineal (y, por lo tanto, el conjunto de solucines de un sistema de ecuaciones lineal) es un espacio vectorial. La dimensión de ese espacio vectorial será lo que mida lo grande que es el espacio. A calcular esa dimension (y, por lo tanto, a saber la magnitud del conjunto de soluciones) nos ayuda el siguiente resultado.

La dimensión del núcleo más el rango es igual a n (dimensión del espacio de partida), lo que podemos expresar con la siguiente fórmula: Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal,

$$n = \dim(f^{-1}(0)) + \dim f(\mathbb{R}^n), \text{ o bien } n = \dim(f^{-1}(0)) + \text{rango}(f). \tag{2.11}$$

De la representación de f como una matriz y de la relación entre la independencia lineal de vectores y el rango de la matriz de sus componentes se deduce que *el rango de una aplicación lineal es igual al rango de su matriz.*

Por ejemplo, si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$, su matriz es

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y su rango es 2 porque la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo. Como consecuencia, aplicando la fórmula (2.11), el núcleo de f tiene dimensión $3 - 2 = 1$.

Si queremos encontrar explícitamente el núcleo de f, tendremos que resolver la ecuación $f(x, y, z) = (0, 0)$, es decir

$$\left.\begin{array}{ll} x + y & = 0 \\ y - z & = 0 \end{array}\right\},$$

cuyas soluciones son los vectores de la forma $(-y, y, y) = y(-1, 1, 1)$, de donde se deduce que $(-1, 1, 1)$ es un sistema de generadores de $f^{-1}(0)$, que sabemos es un espacio vectorial y acabamos de ver que su dimensión es 1, luego $(-1, 1, 1)$ es una base de $f^{-1}(0)$.

El núcleo de una aplicación lineal da una manera estándar de representar un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal de rango m (por lo tanto $n \geq m$), su núcleo, que viene descrito como el conjunto de vectores x que verifican la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{2.12}$$

es un espacio vectorial de dimensión $n - m$, y a la ecuación (**??**) se la llama **ecuación en implícitas del subespacio vectorial**. Si usamos la matriz A que representa a f, la ecuación (2.12) se escribe como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

o, realizando el producto de matrices,

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_+1 \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\},$$

que es el modo desarrollado habitual en que se dan las ecuaciones en implícitas de un subespacio vectorial (de dimensión $n - m =$ número de incógnitas-números de ecuaciones si el rango de la matriz A es igual a m =números de ecuaciones, en cuyo caso se dice también que las ecuaciones son independientes).

Veamos algunos ejemplos:

1. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial definido por la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

   como la matriz es 3×3, representa una aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Como el rango de la matriz (y, por lo tanto, de la aplicación) es 2, la dimensión del espacio definido por la ecuación matricial, que coincide con la del núcleo de la aplicación, es

$$\text{dimensión del espacio de partida - rango } = 3 - 2 = 1.$$

2. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial definido por la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

   como la matriz es 2×3, representa una aplicación $f : \mathbb{R}^2 3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Como el rango de la matriz (y, por lo tanto, de la aplicación) es 1, la dimensión del espacio definido por la ecuación matricial, que coincide con la del núcleo de la aplicación, es

$$\text{dimensión del espacio de partida - rango } = 3 - 1 = 2.$$

3. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial vectorial definido por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{cl} x + 2y + 3z & = 0 \\ 2x + y & = 0 \\ 3x + 3y + 3z & = 0 \end{array}\right\} ?$$

Estas ecuaciones son las del núcleo de una aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es 2, y, por lo tanto, definen un espacio vectorial de dimensión $3 - 2 = 1$.

Nota 2.0.1 ** Obsérvese que, en los ejemplos anteriores, las preguntas se podrían haber formulado, de modo equivalente, del siguiente modo: ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial de las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo ...?.*

Ejercicios

1. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

   $S = \{(x, y, 1); x, y \in \mathbb{R}\}$, $L = \{(x, y, z); x + y = 0, x - 2z = 0\}$, $M = \{(x, y, z); 2x + y - 3z = 0\}$, $N = \{(x - y, y - z, z - x); x, y, z \in \mathbb{R}\}$, determinar cuales son subespacios vectoriales y cuales no. De aquellos que sean subespacios vectoriales, decir cual es su dimensión y encontrar una base.

2. Calcula las ecuaciones en paramétricas y en implícitas del subespacio vectorial generado por los vectores $(1, 2, 0)$ y $(0, -1, 2)$.

3. Decir si los siguientes conjuntos son o no espacios vectoriales:

   (a) $V = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = z\}$, (b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + t = 2\}$, (c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ xy = 3\}$, (d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y = 0\}$, (e) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ 2x + t = y\}$, (f) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = y^2\}$.

4. Decir en los siguientes casos si el vector v pertenece o no al espacio vectorial V:

   (a) $v = (1, 2, 5)$, $V =< \{(1, 3, 2), (2, 4, 1), (1, 5, 7)\} >$,

   (b) $v = (8, 1, 1)$, $V =< \{(1, 3, 2), (2, 1, 1)\} >$.

5. Decidid si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

   a) $\{(1, 1, 2, 3, 4), (2, 3, 3, 1, 3), (5, 7, 4, 1, 5)\}$,

   b) $\{(1, 1, 1), (2, 3, 1), (0, 1, 7), (6, 5, 14)\}$,

   c) $\{(2, 1, 3), (4, 1, 5), (2, 1, 2)\}$, d) $\{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (1, 3, 7), (2, 4, 6)\}$.

6. Decidid si los siguientes conjuntos de vectores son o no base del espacio vectorial V :

   a) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4), (2, 6, 8, 5)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   c) $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y\}$.

   d) $\{(1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 4)\}$, $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ z = x + y\}$.

7. Hallad una base de los siguientes espacios vectoriales:

   (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$.

   (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = z\}$.

   (c) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ z = 3x, y = t\}$.

   (d) $V =< \{(1, 2, 5, 3), (2, 3, 1, 4), (3, 8, 3, 5)\} >$.

8. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 3, 2)$, $x = (1, 1, 0)$, $y = (3, 8, 5)$. Demostrar que $< \{u, v\} >=< \{x, y\} >$.

9. Demuestra que

   (a) El subespacio vectorial definido por la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   tiene dimensión 1 (se dice entonces que es un a recta vectorial).

   (b) El subespacio vectorial definido por la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   se reduce al vector 0.

   (c) El subespacio vectorial definido por la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   tiene dimensión 2 (es un plano vectorial)

   En los casos (a) y (c), da las ecuaciones en implícitas y en paramétricas de ese subespacio vectorial.

10. Averigua si, de la familia de vectores $\{(1, 2, -3), (3, 2, 3), (-5, -2, -1), (2, 0, 2)\}$ se puede extraer una base. Caso de respuesta afirmativa, encuentra las coordenadas de $(3, -1, 2)$ en esa base.

11. Determina la dimensión del espacio de las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones, dependiendo de los valores de m, a y n:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y - 6z & = & 0 \\ x - 2y + 6z & = & 0 \\ 3x - y + mz & = & 0 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{rcl} x + ay + z & = & 0 \\ x + y + az & = & 0 \\ ax + y + z & = & 0 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ 2x - my + nz & = & 0 \\ x + z & = & 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x-y & = & 0 \end{array}\right\}$$

Describe, en cada caso, de qué aplicación lineal son el núcleo las soluciones de cada sistema de ecuaciones. Indica también, en cada caso, cual es el menor número de ecuaciones para describir el mismo espacio.

Capítulo 3

Sobre la Geometría de $\mathbb{R}^n$

3.1 Aplicaciones afines y k-planos afines

Después de estudiar las aplicaciones lineales, el siguiente caso más sencillo de aplicación contínua es el de las aplicaciones afines, que son. según dijimos al final del capítulo 1, aquellas funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cuyas funciones coordenadas $y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)$ son polinomios (no necesariamente homogéneos) de grado 1, es decir, son de la forma

$$\begin{aligned}
&y_1(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1, \\
&y_2(x_1, ..., x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2, \\
&\vdots \\
&y_m(x_1, ..., x_n) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + b_m,
\end{aligned}$$

que también se puede escribir en forma matricial usando dos matrices: la matriz F de tipo $m \times n$ formada por los coeficientes de los polinomios de la expresión anterior, y la matriz B de tipo $m \times 1$ formada por los términos independientes de los polinomios

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

que tiene la propiedad de que

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

es decir, si escribimos el vector $x = (x_1, ..., x_n)$ en forma de matriz columna $X = (x_1 \ ... \ x_n)^t$, entonces

$$f(x) = FX + B.$$

A F se la llama matriz de la aplicación lineal asociada a f, y a B la parte traslación de f.

Veamos algunos ejemplos:

Ej.1) Determina las coordenadas de la imagen del vector $(1, 0, -1)$ por la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que tiene por matriz de la aplicación lineal asociada asociada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y cuya parte traslación es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bastará con hacer actuar la matriz sobre el vector en forma de columna y sumarle, a la matriz columna resultante, la matriz de la parte traslación, así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Según se ve, una aplicación afín f se descompone en una parte lineal de matriz F y la suma con un vector de coordenadas las de la matriz B, que es la llamada parte traslación, pues corresponde a trasladar todos los vectores de $\mathbb{R}^m$ sumándoles un vector fijos cuyas coordenadas son las de los elementos de la matriz B, así, si nos preguntan:

Ej.2) Determina las coordenadas de la imagen del vector $(1, 3, -1)$ por la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya parte lineal lleva los vectores e_1, e_2, e_2 en los vectores $(1, 0, 0), (1, 2, 1), (2, 0, 1)$ respectivamente, y cuya parte traslación viene dada por el vector $(-1, 3, 11)$.

Primero hay que calcular la matriz de la parte lineal, que se obtiene poniendo como columnas de la matriz las componentes de las imágenes de e_1, e_2, e_2, luego la aplicación anterior actúa sobre el vector dado así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

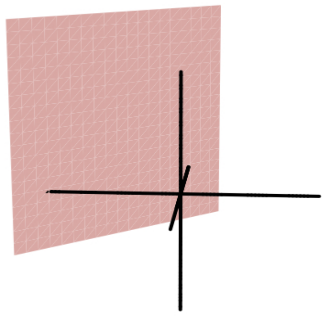
Para ver como es la gráfica de una de estas aplicaciones, remitimos a la página 16.

Los k-planos afines están relacionados con los k-planos vectoriales como las aplicaciones afines con las lineales: Un **espacio afín** E de $\mathbb{R}^n$ es el que se obtiene de un espacio vectorial V por una traslación de un vector $p \in \mathbb{R}^n$, es decir, un espacio afín es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de la forma $p + V = \{p + v;\ v \in V\}$, donde $p \in \mathbb{R}^n$ y V es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. En particular, cuando $p = 0$ se obtiene un espacio vectorial como caso particular de un espacio afín. Así, los espacios afines son la generalización, a dimensión arbitraria, de las rectas y planos de $\mathbb{R}^3$. Cuando esas "rectas y planos" pasan por el origen, son espacios vectoriales, si no, son, simplemente, espacios afines.

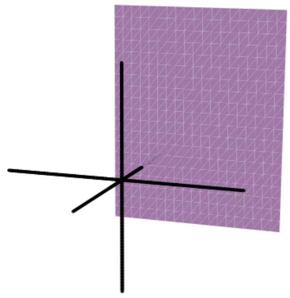
Un espacio afín $E = p + V$ se dice que tiene dimensión k si el espacio vectorial V tiene dimensión k, y, entonces, se le llama también **k-plano afín**.

De su definición resulta que un espacio afín $E = p + V$ queda determinado cundo se conoce uno de sus puntos p y una base de sus espacio vectorial asociado V.

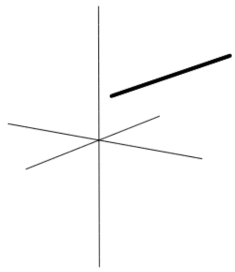
Usando los ejemplos de espacio vectorial de la sección 2.4, podemos dar los siguientes ejemplos y dibujos de espacio afín. Si $p = (1, 1, 1)$ y $W = \{(y, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$, son subespacios afines (de dimensiones respectivas 2, 2 y 1) los siguientes:



$p + W$



$p + \{0\} \times \mathbb{R}^2$



$p + \mathbb{R} \times \{(0, 0)\}$

Las aplicaciones afines tienen las siguientes propiedades análogas a (y consecuencia de) las de las aplicaciones lineales:

La imagen $f(\mathbb{R}^n)$ de una aplicación afín $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un espacio afín. Con más precisión, si f tiene la representación matricial

$$f(x) = FX + B,$$

entonces $f(\mathbb{R}^n)$ es un espacio afin de dimensión igual al rango de la matriz F, y que contiene al punto $b \in \mathbb{R}^m$ cuyas coordenadas son los elementos de la matriz B. Así, por ejemplo, la imagen de $\mathbb{R}^3$ por la aplicación afín del ejemplo 1 de la página 47 es un 2-plano afín que pasa por el punto $(1, 2, -1)$.

3.2 Distancia en $\mathbb{R}^n$

Se define el **producto escalar de dos vectores** $u = (u_1, ..., u_n)$, $v = (v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ por la fórmula

$$u.v := u_1 v_1 + ... + u_n v_n,$$

que también se denotará en ocasiones así: $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Obsérvese que el producto escalar de dos vectores es un escalar (es decir, un número real positivo. Además, verifica las siguientes propiedades:

- i) $u.(v + w) = u.v + u.w$
- ii) $u.(\lambda v) = \lambda\ u.v$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$,
- iii) $u.v = v.u$.
- iv) $\langle u, u\rangle \geq 0$, y $\langle u, u\rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

El **módulo de un vector** u es

$$|u| := \sqrt{u.u} = \sqrt{(u_1)^2 + ... + (u_n)^2}.$$

El módulo, el producto escalar y el ángulo que forman dos vectores están relacionados por $|u.v| = |u||v|\cos\theta, \quad \theta = \measuredangle(u, v)$.

La **distancia entre dos puntos** $p, q \in \mathbb{R}^n$ se define como el módulo de la diferencia de los vectores p y q, es decir

$$d(p, q) = |p - q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2},$$

siendo $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ y $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$.

Obsérvese que *cuando $n = 1$ y, por lo tanto p y q son números reales, su distancia $|p - q|$ es el valor absoluto de la diferencia.*

Dos **vectores** se dice que son **ortogonales** si su producto escalar es 0, lo que equivale a que forman un ángulo de 90^o ó $\pi/2$ radianes, y también a que la proyección de un vector sobre el otro sea 0.

Un vector u se dice que es unitario si su módulo es 1, i.e. si $|u| = 1$.

Ejercicios

1. Dados los vectores $u = (2, 1)$, $v = (8, -6)$ y $w = (-3, -4)$ de $\mathbb{R}^2$,

   (a) Calcular $|u + v|$, $|u| + |v|$, $5\ |u| + |-2\ v|$, y $|5\ u - 2\ v|$. Relacionar los resultados con una conocida desigualdad general.

   (b) Encontrar el vector x de $\mathbb{R}^2$ que satisface la ecuación $u - 3\ x = v + 2\ w + x$.

   (c) Expresar u como suma de un vector en la dirección de v y otro ortogonal a v.

   (d) Calcular $d(v, w)$, $\langle v, w\rangle$ y $\measuredangle(v, w)$.

2. Mostrar que la distancia entre dos puntos v y w de $\mathbb{R}^n$ aumenta cuando aumenta el ángulo $\theta = \measuredangle(v, w)$ (recuérdese que tomamos $\theta \in [0, \pi]$).

3. (a) Si a y b son dos números reales que satisfacen la ecuación $3a + 5b = 0$, interpretar esta ecuación como el producto escalar de dos vectores, y escribir al menos dos pares de números a, b diferentes que definan vectores que sean ortogonales al vector que sugiere la ecuación anterior.

   (b) repetir el mismo problema con el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{ll} 3a + 5b + c & = 0 \\ 2a - 3b - c & = 0 \end{array}\right\}.$

4. Determinar los ángulos entre los siguientes pares de vectores:

   (a) $(3, -1)$, $(2, 1)$, (b) $(1, 1, 0)$, $(-1, -2, 1)$ (c) $(-6, 0, 2)$, $(-5, 3. -2)$.

3.3 Bases ortonormales, ortogonalidad y proyección sobre un subespacio.

Una **base** $\{u_1, ..., u_k\}$ de un espacio vectorial V se dice que es **ortonormal** si los vectores que la componen son unitarios y ortogonales dos a dos, es decir, si $e_i.e_j = \delta_{ij}$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker que introdujimos en el apartado de las matrices. Como ejemplo, la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal.

Si $\{u_1, ..., u_k\}$ es una base ortonormal de V, $v \in V$ y v_i, $1 \leq i \leq k$ son las componentes de v en la base $\{u_1, ..., u_k\}$, entonces $v_i = v.u_i$, o, lo que es lo mismo,

$$v = v.u_1 \; u_1 + \cdots + v.u_k \; u_k.$$

Si k vectores $\{u_1, ..., u_k\}$ de un espacio vectorial V de dimensión k verifican $u_i.u_j = \delta_{ij}$, entonces forman una base ortonormal, ya que la condición de ortonormalidad implica la independencia lineal. En efecto, si $u_i.u_j = \delta_{ij}$ y

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k = 0,$$

multiplicando escalarmente por u_j $(j = 1, ..., k)$, se tiene

$$\lambda_j = \lambda_j u_j.u_j + ... + \lambda_1 u_1.u_j + ... + \lambda_k u_k.u_j = 0,$$

de donde se deduce que $\{u_1, ..., u_k\}$ son l.i..

Además, todo subespacio vectorial admite una base ortonormal.

Se dice que **dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales** si todo vector de uno es ortogonal a todo vector del otro.

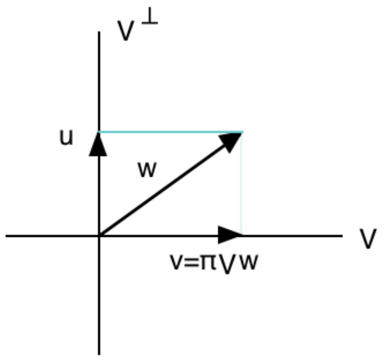
Dado un subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$, se llama **complemento ortogonal de** V al conjunto $V^\perp$ de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales a todos los vectores de V, es decir

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n; \; \langle u, v \rangle 0 = \text{ para todo } v \in V\}.$$

Se demuestra que ($V^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y que $dim(V) + \dim(V^\perp) = n$.

Vamos a ver que *todo vector* $w \in \mathbb{R}^n$ *se puede escribir (de forma única) como*

$$w = v + u, \text{ con } v \in V \text{ y } u \in V^\perp \tag{3.1}$$



(de forma única significa que los vectores $v \in V$ y $u \in V^\perp$ tales que $w = v + u$ son únicos). En efecto, sean $\{e_1, ..., e_k\}$ una base ortonormal de V, y $\{e_{k+1}, ..., e_n\}$ una base ortonormal de $V^\perp$, entonces $\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, luego se puede escribir $w = w.e_1 \; e_1 + ... + w.e_k \; e_k + w.e_{k+1} \; e_{k+1} + ... + w.e_n \; e_n$, y, como $v = w.e_1 \; e_1 + ... + w.e_k \; e_k \in V$ y $u = w.e_{k+1} \; e_{k+1} + ... + w.e_n \; e_n \in V^\perp$, tenemos probado lo que buscábamos.

Al v de la fórmula (3.1) se le llama **proyección ortogonal de** w **sobre** V, y se escribe $v = \pi_V w$. La misma demostración que hemos dado de que (3.1) es correcta da la fórmula para calcular

$$\pi_V w = w.e_1 \; e_1 + ... + w.e_k \; e_k.$$

Veamos un ejemplo: en $\mathbb{R}^4$, la proyección ortogonal de $(1,2,3,4)$ sobre $V = \{0\}\times\mathbb{R}^2\times\{0\}$ es $(0,2,3,0)$, lo que se puede calcular con el procedimiento anterior de la siguiente forma: $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ es una base ortonormal de $\{0\}\times\mathbb{R}^2\times\{0\}$, por lo que

$$\begin{aligned}\pi_V(1,2,3,4) &= (1,2,3,4).(0,1,0,0) + (1,2,3,4).(0,0,1,0)\\ &= (0,2,0,0) + (0,0,3,0) = (0,2,3,0).\end{aligned}$$

Si el espacio V tiene dimensión 1 (se dice entonces que V es una recta vectorial) y v es un vector no nulo de V, entonces $e = \frac{v}{|v|}$ es una base ortonormal de V y, para todo $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\pi_V w = w.e\ e = \frac{1}{|v|^2}(w.v)\ v.$$

Veamos un ejemplo: Calcular $\pi_V(1,2,3)$ cuando V es el espacio generado por el vector $(1,1,1)$. Procediendo como acabamos de indicar:

$$\pi_V w = \left((1,2,3).\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right)\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = (2,2,2).$$

Si $\dim(V) = 2$ y $\{u,v\}$ es una base de V, se puede construir una base ortonormal a partir de la base dada de la siguiente forma: primero se toma $e_1 = u/|u|$, luego se busca un vector de V que sea ortogonal a e_1, que es lo mismo que ser ortogonal a u y, dividiéndolo por su norma tendremos el vector que completa la base ortonormal. Ese segundo vector que buscamos, por pertenecer a V se podrá escribir como combinación lineal de la base dada, es decir, de la forma $\lambda u + \mu v$. La condición de que sea ortogonal a u es equivalente a

$$0 = u.(\lambda u + \mu v) = \lambda|u|^2 + \mu\ u.v,$$

de donde resulta que $\lambda u + \mu v$ es ortogonal a u si y solo si los números λ y μ verifican

$$\lambda = -\frac{\mu\ u.v}{|u|^2},$$

tomando $\mu = 1$, y dividiendo el vector resultante por la norma obtenemos el vector e_2 que completa la base ortonormal

$$e_1 = \frac{u}{|u|}, \quad e_2 = \frac{-\frac{\mu\ u.v}{|u|^2}u + v}{\left|-\frac{\mu\ u.v}{|u|^2}u + v\right|},$$

que se puede usar para calcular la proyección sobre V. Veamos un ejemplo: Calcular $\pi_V(1,2,3)$ cuando V es el espacio generado por los vectores $(1,1,1)$ y $(1,-1,-1)$. Procediendo como acabamos de indicar: $e_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}$, $(\lambda(1,1,1) + \mu(1,-1,-1)).(1,1,1) = 0$, de donde $\lambda = \mu/3$, luego podemos tomar $e_2 = ((1/3)(1,1,1) + (1,-1,-1))/|(1/3)(1,1,1) + (1,-1,-1)| = (2,-1,-1)/\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\pi_V w &= \left((1,2,3).\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right)\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} + \left((1,2,3).\frac{(2,-1,-1)}{\sqrt{6}}\right)\frac{(2,-1,-1)}{\sqrt{6}}\\ &= (2,2,2) + (-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (1,\frac{5}{2},\frac{5}{2}).\end{aligned}$$

La fórmula (3.1) usada para definir la proyección ortogonal se puede reescribir como

$$w = \pi_V w + \pi_{V^\perp} w,$$

de donde, despejando, resulta

$$\pi_V w = w - \pi_{V^\perp} w,$$

que es útil para calcular proyecciones cuando $\dim(V^\perp) < \dim(V)$, es decir, cuando $k > n/2$. Veamos como usarla en el mismo ejemplo ejemplo anterior a esta observación: Si V es el espacio generado por los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, -1)$, entonces $V^\perp$ está generado por un vector (a, b, c) que sea ortogonal a ambos, por lo tanto, que verifique

$$\left.\begin{array}{lll} (a,b,c).(1,1,1) & = a+b+c & = 0 \\ (a,b,c).(1,-1,-1) & = a-b-c & = 0 \end{array}\right\},$$

y, resolviendo este sistema de ecuaciones, $a = 0$, $b = -c$, luego $(0, b, -b)$ es una base de $V^\perp$, y

$$\begin{aligned} \pi_V(1,2,3) = (1,2,3) - \pi_{V^\perp}(1,2,3) = (1,2,3) - \left((1,2,3).\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}\right)\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} \\ = (1,2,3) - (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (1,\frac{5}{2},\frac{5}{2}). \end{aligned}$$

Sabemos que un espacio vectorial V de dimensión k puede darse por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{llll} a_{k+1,1}x_1 & +... & + \quad a_{k+1n}x_n & = 0 \\ ... & ... & ... \quad ... & \\ a_{n,1}x_1 & +... & + \quad a_{nn}x_n & = 0 \end{array}\right\}, \tag{3.2}$$

y el espacio vectorial ortogonal a V está formado por aquellos vectores $(v_1, ..., v_n)$ que, al multiplicarlos escalarmente por los vectores $(x_1, ..., x_n)$ de V dan 0, es decir, que verifican $v_1x_1 + ... + v_nx_n = 0$. Pero ésta es justamente la condición que verifican los vectores $(a_{k+1,1}, ..., a_{k+1n})$, ... $(a_{n,1}, ..., a_{nn})$ según se observa en (3.2), luego son $n - k$ vectores del ortogonal, que tiene dimensión $n-k$, y son linealmente independientes, pues la matriz de sus coeficientes tiene rango $n-k$, luego son una base de $V^\perp$. Por lo tanto, cuando se expresa un subespacio vectorial por un sistema de ecuaciones como el (3.2), el espacio vectorial ortogonal a su espacio vectorial director es el que tiene como base los vectores cuyas componentes son los coeficientes (de las incógnitas) de las ecuaciones.

Así, por ejemplo, el espacio vectorial ortogonal a la recta vectorial $\left.\begin{array}{lllll} x & + & y & + & = 0 \\ x & + & & + \ z & = 0 \end{array}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ es el que tiene como base los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

3.4 Ecuaciones de k-planos afines

Como ya vimos en la primera sección de este capítulo, un k-plano afín es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de la forma $p + V$, donde $p \in \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^n$. Si $v_1, ..., v_k$ es una base de V, todo elemento del k-plano se puede escribir como

$$y = p + \mu_1 v_1 + ... + \mu_k v_k; \qquad \mu_1, ..., \mu_k \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

o, usando coordenadas,

$$y_i = p_i + \mu_1 v_{1i} + ... + \mu_k v_{ki}; \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.4}$$

Estas ecuaciones ((3.3) o (3.4)) se llaman ecuaciones en paramétricas de $p + V$.

Por ejemplo, si R *es la recta de* $\mathbb{R}^3$ *que pasa por* $(1, 2, 1)$ *en la dirección del espacio vectorial generado por* $(1, 1, 0)$*, su ecuación es*

$$(1, 2, 1) + t(1, 1, 0) = (1 + t, 2 + t, 1); \qquad t \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente,

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 + t \\ y & = & 2 + t \\ z & = & 1 \end{array}$$

Si $\nu_{k+1}, ..., \nu_n$ es una base del espacio $V^\perp$ ortogonal a V, para cada $y \in p + V$ se tiene que $(y - p)\dot{\nu}_j = 0$ para todo $j = k + 1, ..., n$, de modo que los elementos $y \in p + V$ se pueden caracterizar como aquellos y que verifican las ecuaciones

$$(y - p).\nu_j = 0; \qquad j = k + 1, ..., n. \tag{3.5}$$

o, detallando coordenadas,

$$\begin{array}{rcl} (y_1 - p_1)\nu_{k+11} + ... + (y_n - p_n)\nu_{k+1n} & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ (y_1 - p_1)\nu_{n1} + ... + (y_n - p_n)\nu_{nn} & = & 0 \end{array} \tag{3.6}$$

Estas ecuaciones ((3.5) o (3.6)) se llaman ecuaciones en paramétricas de $p + V$.

Por ejemplo, si P *es el plano de* $\mathbb{R}^3$ *que pasa por* $(1, 2, 1)$ *y es ortogonal al vector* $(1, 1, 0)$*, su ecuación es*

$$((x, y, z) - (1, 2, 1)).(1, 1, 0) = 0$$

o, equivalentemente,

$$(x - 1) + (y - 2) = 0$$

3.5 Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

El **producto vectorial** $u \wedge v$ de dos vectores u, v de $\mathbb{R}^3$ se define por la fórmula

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

donde $\{i, j, k\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y u_i, v_i son las componentes de u y v respectivamente en esa base.

El producto vectorial verifica las siguientes propiedades:

- i) $u \wedge v$ es ortogonal a u y a v.

- ii) $|u \wedge v| = |u|\ |v| \operatorname{sen}\theta$, siendo $\theta = \measuredangle(u, v)$,
- iii) $u \wedge v = -v \wedge u$,
- iv) $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$,
- v) $u \wedge (\lambda\ v) = \lambda\ u \wedge v$
- vi) $(u \wedge v).w = u.(v \wedge w) = \det \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$.

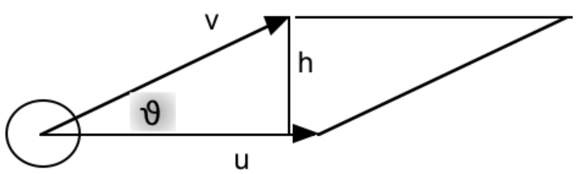
El producto vectorial se puede usar para calcular áreas y volúmenes así:

Area de un paralelogramo generado por dos vectores u y v. Como se observa en la figura, usando los conocimientos de geometría elemental (ver figura) y la propiedad ii) anterior,

$$Area = |u|h = |u||v| \operatorname{sen}\theta = |u \wedge v|$$

Resulta de ahí que **área del triángulo** generado por los mismos vectores es

Area(triángulo) $= \frac{1}{2}|u||v| \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}|u \wedge v|$.

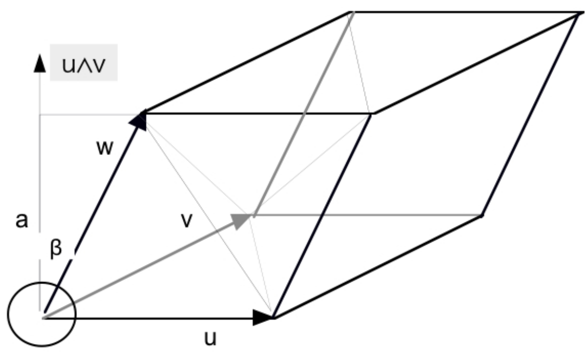


Así, por ejemplo, el el área del triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,1)$ se puede calcular considerando este triángulo como el generado por los vectores $u = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$ y $v = (1,1,1) - (1,0,0) = (0,1,1)$, aplicando entones la fórmula anterior, tenemos

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-1) \quad \text{y} \quad \text{Area(triángulo)} = \frac{1}{2}|u \wedge v| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El **volumen de un paralelepípedo** generado por tres vectores u, v y w se puede calcular, como se observa en la figura, multiplicando el área del paralelogramo generado por u y v que, según acabamos de ver es $|u \wedge v|$, por la altura a del paralelepípedo, que, como se observa de nuevo en la figura, es el módulo de la proyección de w sobre $u \wedge v$, es decir, a$= |w||\cos\beta|$, de donde se deduce que

$Volumen = |u \wedge v||w||\cos\beta||(u \wedge v).w|$



Como el paralelepípedo generado por tres vectores se puede dividir en tres tetraedros iguales al generado por los mismos vectores (ver la figura anterior), el **volumen del tetraedro** generado por los vectores u, v y w es

Volumen(tetraedro) $= \frac{1}{6}|(u \wedge v).w|$.

Así, por ejemplo, el volumen del tetraedro de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ y $(1,2,1)$ se puede calcular considerando este tetraedro como el generado por los vectores $u=(0,1,0)-(1,0,0)=(-1,1,0)$, $v=(1,1,1)-(1,0,0)=(0,1,1)$ y $w=(1,2,1)-(1,0,0)=(0,2,1)$, aplicando entones la fórmula anterior, tenemos

Volumen de ese tetraedro $=|(u\wedge v).w| = \frac{1}{6}$ módulo de $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}$, y el volumen del paralelepipedo generado por los mismos puntos es 1.

Vamos a ver ahora lo que se entiende por **ortogonalidad o perpendicularidad de subespacios afines**.

Dados dos subespacios afines E y F de $\mathbb{R}^n$,

- (a) si la suma de las dimensiones de E y F es menor o igual que n, entonces se dice que E y F son ortogonales si sus subespacios vectoriales directores son ortogonales (en particular, en $\mathbb{R}^3$, una recta es ortogonal a otra recta o a un plano si su espacio vectorial director es ortogonal al de la otra recta o al del plano),
- (b) si la suma de las dimensiones de E y F es estrictamente mayor que n, entonces se dice que E y F son ortogonales si los espacios vectoriales ortogonales a sus espacios vectoriales directores son ortogonales (en particular, en $\mathbb{R}^3$, dos planos son ortogonales si un vector ortogonal al espacio vectorial director de uno de ellos es ortogonal a un vector ortogonal al espacio vectorial director del otro plano.

Ejercicios

1. Encontrar las proyecciones ortogonales del vector $u=(1,1,1,1)\in\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio V generado por los vectores $(1,-1,1,1)$ y $(1,1,-1,1)$ y sobre su ortogonal $V^\perp$. Descomponer u como suma de un vector de V y otro de $V^\perp$.

2. Determinar la componente del vector $u=(2,3,1)$ en la dirección del vector $(1,2,1)$ y la componente de u ortogonal a v.

3. Decir cual es la dimensión y encontrar una base de los subespacios vectoriales V de $\mathbb{R}^n$ que se dan a continuación y de sus ortogonales:
   (a) $V=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ x+y+z=0,\ y-z-w=0\}$,
   (b) $V=\{(x-y,y-z,z-w,w)\in\mathbb{R}^4;\ x,y,z,w\in\mathbb{R}\}$,
   (c) $V=\{(x-y,y-z,z,z)\in\mathbb{R}^4;\ \ x,y,z,w\in\mathbb{R}\}$,
   (d) $V=\{\lambda\ (1,0,1,0))+\mu(0,-1,1,0)\in\mathbb{R}^4;\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$,
   (e) $V=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ y-z-w=0, x+y+z+w=0, x-y=0\}$,
   (f) $V=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4; x+y+z+w=0\}$.

4. Dado el vector $w=(1,-1,1,1)\in\mathbb{R}^4$, obtener sus proyecciones sobre cada uno de los subespacios V dados en el ejercicio anterior y sobre cada uno de sus ortogonales $V^\perp$.

5. Calcular las áreas de

   (a) los paralelogramos generados por: (a1) los vectores $(2,1,0)$ y $(1,0,2)$,

   (a2) los vectores $(1,1,1)$ y $(0,2,3)$,

   (b) los triángulos de vértices (b1) $(1,1,1)$, $(2,3,4)$ y $(5,6,7)$,

   (b2) $(4,7,8)$,$(2,2,2)$ y $(7,4,8)$,

   (c) los cuadriláteros de vértices (c1) $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ y $(1,2)$,

   (c2) $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ y $(2,2)$, (c3) $(1,1)$, $(2,3)$, $(0,2)$ y $(0,3)$.

6. Calcular los volúmenes de

   (a) los paralelepípedos generados por los vectores :

   (a1) $(2,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,0,2)$, (a2) $(1,1,1)$, $(-1,0,0)$ y $(0,2,3)$,

   (b) los tetraedros de vértices

   (b1) $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $0,0,0)$ y $(5,6,7)$, (b2) $(4,7,8)$,$(2,2,2)$, $(1,1,1)$ y $(7,4,8)$.

7. Calcular las áreas de los tetraedros del ejercicio anterior.

Capítulo 4

Límites y continuidad

4.1 Funciones continuas

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, y $a \in \mathbb{R}^n$, **se dice que** $\lim_{x\to a} f(x) = b$ **si para todo** $\epsilon > 0$ **existe un** $\delta > 0$ **tal que si** $|x - a| < \delta$**, entonces** $|f(x) - b| < \epsilon$. Esta es la manera formal de expresar la idea de que **el límite** $b = \lim_{x\to a} f(x)$ **de la función** f **cuando** x **tiende a** a **es el valor al que se aproxima** $f(x)$ (esa proximidad es lo que se indica cuando se dice $|f(x) - b| < \epsilon$) **cuando** x **se aproxima a** a (y esta otra proximidad es lo que significa $|x - a| < \delta$).

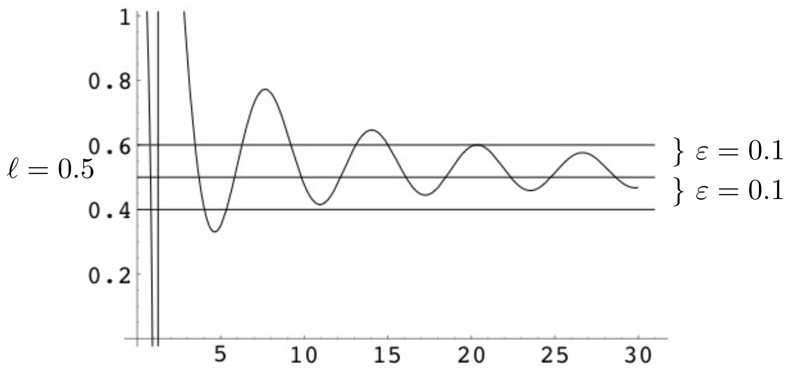
Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ **se dice que es continua en** $a \in \mathbb{R}^n$ **si** $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. De acuerdo con la definición anterior de límite, *la continuidad de la función f en a significa que $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ cuando x se aproxima a a.*

En el caso $n = 1$, también tiene un sentido intuitivo decir que un punto tiende a ∞ o a $-\infty$, y, por ello, **para funciones** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$**, se definen también los límites**:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x > M$*, entonces* $|f(x) - b| < \epsilon$*, lo que significa que, cuando x se hace muy grande, $f(x)$ se aproxima a b.*

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x < M$*, entonces* $|f(x) - b| < \epsilon$*, lo que significa que, cuando x se hace muy negativo, $f(x)$ se aproxima a b.*

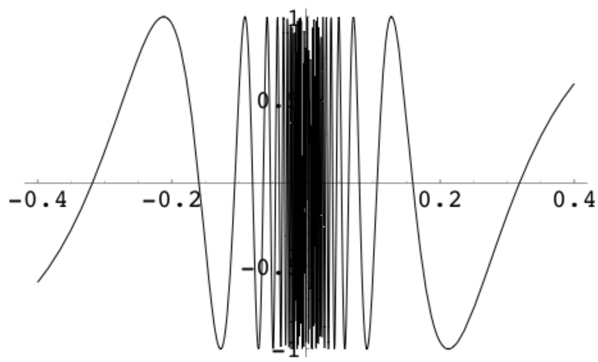
La gráfica siguiente corresponde a una función $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que converge a $\ell = 0.5$ cuando $x \to \infty$. En ella se observa que, si $\varepsilon = 0.1$, todos los $f(x)$ para $x > 16$ se encuentran dentro de una franja de anchura $2\varepsilon = 2 \times 0.1$ alrededor de $\ell = 0.5$, esta gráfica muestra el significado geométrico de la noción de límite cuando $x \to \infty$.



El límite de una función puede no existir, así, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}, \tag{4.1}$$

no tiene límite cuando $x \to 0$. Se deduce de ello que esta misma función no es continua en 0.



Tampoco tiene límite la función $f(x) = x^2$ cuando x tiende a ∞ o $-\infty$, pero en un sentido distinto a la anterior función. En este caso se puede decir que la función x^2 tiende a infinito cuando x tiende a ∞ y también cuando x tiende a $-\infty$, de acuerdo con la siguientes definiciones generales:

Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiende a ∞ (resp. $-\infty$) cuando x tiende a $a \in \mathbb{R}^n$ si $f(x)$ se hace muy grande (resp. muy negativo) cuando x se aproxima a a, lo que se enuncia de una manera más precisa así: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$) si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M$ (resp. $f(x) < M$).

Para funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se dice que f tiende a $a \in \mathbb{R}^n$ cuando x tiende a ∞ (resp. $-\infty$) si $f(x)$ se aproxima a a cuando x se hace muy grande (resp. muy negativo), lo que se enuncia de una manera más precisa así: $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$) si para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x > M$ (resp. $x < M$), entonces $|f(x) - a| < \epsilon$.

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un punto, si existe, es único.

Una **función** $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ **se dice que es acotada** si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in U$.

Una **función** $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **se dice que es acotada superiormente** (resp. inferiormente) si existe un número $M > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in U$ (resp. $f(x) > M$ para todo $x \in U$). El número M se llama cota superior (resp. inferior) de f.

Dado un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, una **cota superior** de X es un número mayor que todos los números de X, y el **supremo** de X, $\sup X$, es la menor de las cotas superiores de X. Una **cota inferior** de X es un número menor que todos los números de X, y el **ínfimo** de X, $\inf X$, es la mayor de las cotas inferiores de X. La definición de que un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ esté acotado superior o inferiormente es análoga a la definición dada para sucesiones. Un conjunto se dice que está acotado si lo está superior e inferiormente. Un conjunto está acotado superiormente si y solo si posee un supremo y está acotado inferiormente si y solo si posee un ínfimo.

Todo esto permite definir:

El **ínfimo de una función** $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como el ínfimo del conjunto $\{f(x); x \in U\}$. Este ínfimo es un número real si y solo si f está acotada inferiormente, y, si no, se dice que este ínfimo es $-\infty$.

El **supremo de una función** $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como el supremo del conjunto $\{f(x); x \in U\}$. Este supremo es un número real si y solo si f está acotada superiormente, y, si no, se dice que este supremo es ∞.

Una **función** $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **creciente** (resp. no decreciente) si $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) \leq f(y)$). Es fácil distinguir una función creciente (resp. no decreciente) por su gráfica: siempre va hacia arriba (resp. nunca va hacia abajo).

Una **función** $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **decreciente** (resp. no creciente) si $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$). Es fácil distinguir una función decreciente (resp. no creciente) por su gráfica: siempre va hacia abajo (resp. nunca va hacia arriba)

Veamos ahora la relación de estos conceptos con el de límite.

Una **función** $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **que es no decreciente y acotada superiormente, tiene límite cuando** x **tiende a** ∞**, y** $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup\{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$. Por ejemplo, la función $\{1 - 1/x\}$ definida sobre $]0, \infty[$ es creciente y acotada, y $\lim_{x\to\infty}(1 - 1/x) = \sup\{1 - 1/x;\ x \in \mathbb{R}\} = 1$.

Una **función** $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **que es no creciente y acotada inferiormente, tiene límite cuando** x **tiende a** ∞**, y** $\lim_{x\to\infty} f(x) = \inf\{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$. Por ejemplo, la función $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + 1/x$ es decreciente y acotada, y $\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x) = \inf\{1 + 1/x;\ x \in \mathbb{R}\} = 1$.

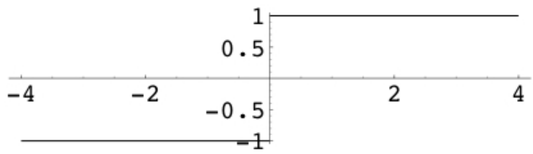
Estos resultados sirven para dar una **definición del número** e. La función $(1 + 1/x)^x$ es creciente y está acotada superiormente (por ejemplo, 3 es una cota superior), luego tiene límite, definimos el número e como ese límite, es decir:

$$e = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x.$$

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es continua en A si lo es en cada $a \in A$.

Son ejemplos de funciones ccontinuasontínuas de $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *todas las funciones elementales estudiadas anteriormente en cada intervalo en que están bien definidas* (no se hacen $\pm\infty$).

No es contínua en $a = 0$ la siguiente función:



$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

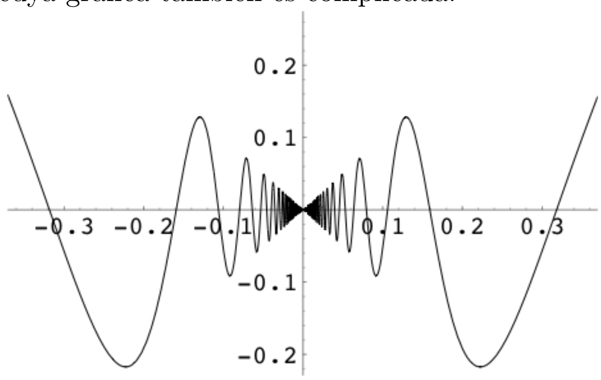
Si f y g son dos funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y λ es un número real, también son continuas:

- $f + g$, que es la función definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

- λf, que es la función definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,
- fg cuando $m = 1$ (lo que permite definir la función producto $fg(x) = f(x)g(x)$),
- $g \circ f$ donde sea posible hacer esta composición, y,
- de nuevo cuando $m = 1$, f/g en los puntos en que $g \neq 0$, donde la función f/g se define por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Para muchas funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se puede adivinar su continuidad a partir de su gráfica: si ésta es de trazo continuo, es contínua, y si se observa un salto en la gráfica, la función no es contínua, tiene una discontinuidad precisamente donde da el salto. Sin embargo, hay funciones continuas y discontinuas cuya gráfica tiene un aspecto más complicado. Ya vimos antes la función (4.1) que no era contínua en 0 y que no era fácil saberlo por la gráfica por ser esta muy complicada. Presentamos a continuación un ejemplo de función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es contínua en todo punto, pero cuya gráfica también es complicada:

$$f(x) = \begin{cases} x \ \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$



Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se expresa en coordenadas como

$$f(x_1, ..., x_n) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)), \tag{4.2}$$

y se tiene entonces que

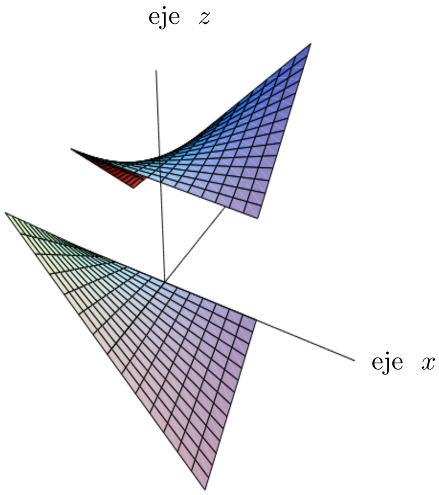
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = (\lim_{x \to x_0} y_1(x), ..., \lim_{x \to x_0} y_m(x)), \tag{4.3}$$

de donde se deduce que:

Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que se expresa en coordenadas como $f(x_1, ..., x_n) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n))$ es contínua si solo si cada una de las funciones y_1, ... , y_m es contínua.

Son ejemplos de funciones continuas todas aquellas cuyas componentes son combinaciones de funciones elementales (productos, sumas, y las vistas en el tema 1) de las variables $x_1, ..., x_n$.

Así, la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xyz, \operatorname{sen}(xy))$ es contínua porque lo son las funciones $y_1(x, y, z) = xyz$ e $y_2 = \operatorname{sen}(xy)$.



Un ejemplo de función no contínua en los puntos $y = 0$ del plano $\mathbb{R}^2$ es la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & si \quad y \leq 0 \\ xy + 1 & si \quad y > 0. \end{cases}$$

Veamos un ejemplo de aplicación de (4.3) Si $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ es contínua y $\{f_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $j = 1, ..., k$ son funciones con $\lim_{x\to a} f_j(x) = \ell_j$, entonces la función $f \circ (f_1, ..., f_k)$ verifica

$$\lim_{x\to a} f \circ (f_1, ..., f_k)(x) = f(\ell_1, ..., \ell_k), \tag{4.4}$$

incluso cuando $a = \pm\infty$.

Así, por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 1}{x^5 + 3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} + \frac{3x^3}{x^5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 0,$$

donde hemos aplicado (4.4), en la última igualdad, a $f_1(x) = \frac{3}{x}$, $f_2(x) = \frac{2}{x^3}$, $f_3(x) = \frac{1}{x^5}$, $f_4(x) = 1 + \frac{3}{x^2}$ y $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_4}$. Análogamente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - 4x^7}{x^7 + 12x} = -4, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x + 2}{x^3 + 7x} = \infty.$$

El siguiente criterio de convergencia se llama **criterio del bocadillo o del sandwich**:

Dadas las funciones convergentes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$, si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función que verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x próximo a a, entonces $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$, y esto aunque $a = \pm\infty$. Así, por ejemplo:

La función $\{\frac{\cos x}{x}\}$ verifica

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}, \text{ y } \lim_{x\to\infty} (-\frac{1}{x}) = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}, \quad \text{luego } \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

Otros hechos útiles que conviene saber para calcular límites son

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ para todo } n, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^0} = 1, \text{ de donde se deduce que } \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ para todo } n > 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\ln x}{x^n}\right| = \infty, \text{ para todo } n \geq 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ para todo } n \geq 1,$$

Ejercicios

1. Calcula los límites

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{3\ x}{x^2-2x}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{2x-7},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^3-2x^2+x}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2+x-6}.$$

2. Calcula los siguientes límites (si existen)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x\cos x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-\ln(x+1)-1}{x^2}.$$

3. Calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x\cos x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\ \operatorname{sen} x}{x^2+x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2+2x}$$

4. Calcula los límites siguientes

$$\begin{array}{ccc}
\lim_{x\to\infty}\frac{5x-6}{4x+10}, & \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}}{4+\frac{7}{x}}, & \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+1}{x^5-3x^3}, \\
\lim_{x\to\infty}\frac{1-4x^7}{x^7+12x}, & \lim_{x\to\infty}\frac{\pi^2x^2-8}{16\ x^2}, & \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}+5-\frac{1}{x^2}, \\
\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}, & \lim_{x\to\infty}\frac{10^{10}\sqrt{x}}{x+1}, & \\
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}, & \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x}, & \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^{3x}, \\
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}, & \lim_{x\to\infty}c^{\frac{1}{x}} \text{ con } c>0, & \lim_{x\to\infty}c^x \text{ con } |c|<1, \\
\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x}, & \lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{4^x+1}, & \lim_{x\to\infty}\frac{c^x}{x!}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^x-c^x}{x-c}.
\end{array}$$

5. Calcula el límite $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sqrt{2}}{x})^{\frac{x}{2}}$.

6. Di si son continuas o no las siguientes funciones

$$f(x)=\begin{cases}3\ x & \text{si } 0\le x<1\\ 2\ x-1 & \text{si } 1\le x\le 2\end{cases}, \quad f(x)=\begin{cases}3\ x & \text{si } 0\le x<1\\ 2\ x+1 & \text{si } 1\le x\le 2\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } -1\le x\le 2\\ -3 & \text{si } 2<x\le 4\end{cases}, \quad f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } -1\le x\le 2\\ -\frac{3x}{2} & \text{si } 2<x\le 4\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } -2\le x<-1\\ x^2 & \text{si } -1\le x<1\\ x^3-2x+1 & \text{si } 1\le x<2\end{cases}, \quad f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } -\pi\le x<0\\ 2x^2+1 & \text{si } 0\le x\le 1\end{cases},$$

y, en caso de respuesta negativa, di cuales son los puntos de discontinuidad.

Capítulo 5

La derivada

5.1 Concepto de derivada de una función de una variable

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la noción de derivada de f en un punto t tiene dos modos básicos de ser entendida. La primera corresponde a una visión analítica, y corresponde a entender la derivada como "velocidad". La segunda corresponde a una visión más geométrica y corresponde a la visión de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, o, lo que es lo mismo, a la visión de la derivada como aproximación de f (función, en general, no lineal, cuya gráfica es una curva no recta) por una función lineal (cuya gráfica es una recta). Este último modo de ver está también relacionado, como veremos, con el desarrollo en serie de Taylor.

Comenzaremos con la definición de **derivada como una velocidad**. En Física se considera, con frecuencia, algo que se mueve recorriendo un espacio e en un tiempo t, a cada instante de tiempo t corresponde un espacio recorrido e, lo que define e como una función de t, $e = f(t)$. El primer concepto de velocidad aparece como el cociente del espacio por el tiempo, es la llamada

$$\text{velocidad media } = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}},$$

de modo que, si consideramos la velocidad media del trayecto entre los tiempos t_1 y $t_2 > t_1$, esta será

$$\text{velocidad media (entre } t_1 \text{ y } t_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Si ahora pretendemos hablar de velocidad instantánea en un instante t_0, es lógico considerar esta velocidad como el límite (si existe) de velocidades medias entre instantes t_0 y $t_0 + \Delta t$ muy próximos a t_0, esta proximidad cada vez mayor de $t_0 + \Delta t$ a t_0 se expresa haciendo tender Δt a 0. De modo que

$$\text{velocidad instantánea (en } t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

y esta es precisamente la definición que daremos de derivada de una función. Con precisión:

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se define la derivada de f en t_0 como el siguiente límite (si existe):

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}, \tag{5.1}$$

esta derivada la denotaremos, indistintamente, por

$$f'(t_0) \text{ o por } \frac{df}{dt}(t_0).$$

Si el límite anterior (la derivada de f en t_0) existe, se dice que la función f es derivable en t_0, y, si no existe, se dice que no es derivable.

De las definiciones de derivada y de continuidad se deduce que

Una función derivable en t_0 es contínua en t_0.

Todas las funciones elementales que estudiamos antes son derivables en todos los puntos en que están definidas, y sus derivadas son, como se puede deducir aplicando la definición (5.1), las siguientes:

i) $c' = 0$, donde indicamos por c la función constante $f(t) = c \in \mathbb{R}$,
ii) $(t^a)' = at^{a-1}$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$, en particular, $(\sqrt{t})' = 1/(2\sqrt{t})$
iii) $(e^t)' = e^t$, iii') $(a^t)' = a^t \ \ln a$
iv) $(\ln t)' = \dfrac{1}{t}$, iv' $(\log_a t)' = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{t}$,
v) $(\operatorname{sen} t)' = \cos t$, vi) $(\cos t)' = -\operatorname{sen} t$,
vi') $(\operatorname{tg} t)' = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$, vi") $(\cot t)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(t)}$,
vii) $(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t$, viii) $(\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$.
viii') $(\operatorname{th} t)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}$, viii") $(\coth t)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(t)}$,

Y, además, si f y g son funciones derivables, se verifica que:
ix) $(f+g)'(t) = f'(t) + g'(t)$, x) $(fg)'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$,
de donde se deduce que
xi) $(c\, f)'(t) = c\, f'(t)$, donde c tiene, como antes, el doble significado de constante real y de función constante con valor constante c.
xii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(t) = \dfrac{g(t)f'(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}$, que puede deducirse de (ii) y (x),
Si, además, tiene sentido la composición $g \circ f$,
xiii) $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))\ f'(t)$. Esta fórmula tiene particular importancia, y se llama **regla de la cadena**.

Una consecuencia es que, si f es biyectiva,
xiv) $(f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}$.
En particular, aplicando estas fórmulas a las funciones trigonométricas inversas,
v') $(\operatorname{arcsen} t)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, vi"') $(\arccos t)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$,
vi"") $(\operatorname{arctg} t)' = \dfrac{1}{1+t^2}$, vi""') $(\operatorname{arccot} t)' = -\dfrac{1}{1+t^2}$,
vii') $(\operatorname{arcsh} t)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, viii') $(\operatorname{arcch} t)' = \dfrac{1}{\sqrt{-1+t^2}}$.
viii") $(\operatorname{arcth} t)' = \dfrac{1}{1-t^2}$, viii"') $(\operatorname{arccoth} t)' = \dfrac{1}{1-t^2}$,

Las derivadas de las demás funciones elementales pueden deducirse a partir de estas reglas.

Otra observación importante es que es cierto el recíproco de la regla de derivación i), en concreto: *si una función tiene derivada* 0 *sobre un intervalo, i.e.* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in I$*, entonces esa función es constante sobre ese intervalo, i.e.* $f(x) = c$ *para todo* $x \in I$ (**caracterización de las funciones constantes**).

La regla de la cadena sirve también para calcular la **derivada de una función definida de forma implícita**. Como ya indicamos en la lección 1, una función $y(x)$ puede definirse implícitamente como aquella que es solución de una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, siendo f una función de dos variables (es decir, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$), así, por ejemplo, $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) - x$ define una función $y(x) = (1/x) \operatorname{arsen} x$. Podemos calcular su derivada derivando la función $(1/x) \operatorname{arsen} x$ respecto de x, o, también, usando la regla de la cadena del siguiente modo:

Si $y(x)$ es solución de $f(x, y) = 0$, se tiene que $f(y(x), x) = 0$, luego

$$\frac{d(f(y(x), x)}{x} = 0,$$

y, de aquí. se despeja $y'(x)$, lo que resulta más simple, en muchos casos, que obtener la expresión de la función $y(x)$ y derivar. La regla de la cadena se usa para el cálculo de

$$\frac{d(f(y(x), x)}{x}.$$

Veámoslo en el ejemplo anterior.

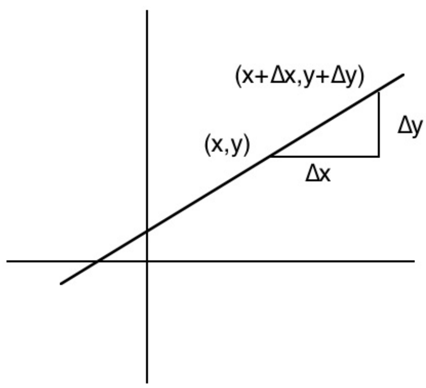
Si $\operatorname{sen}(xy) - x = 0$, derivando aplicando la regla de la cadena al primer sumando:

$$\cos(xy)(y + xy') - 1 = 0, \text{ de donde } y' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\cos(xy)} - y\right).$$

Otro ejemplo: Calcular la derivada de la función $y(x)$ que verifica la ecuación $y^5 + xy + x^2 = 3$. Derivando aplicando la regla de la cadena,

$$5y^4y' + y + xy' + 2x = 0 \text{ de donde } y' = \frac{-2x - y}{5y^4 + x}.$$

Vamos ahora a ver la **derivada como la pendiente de la recta tangente a su gráfica**.

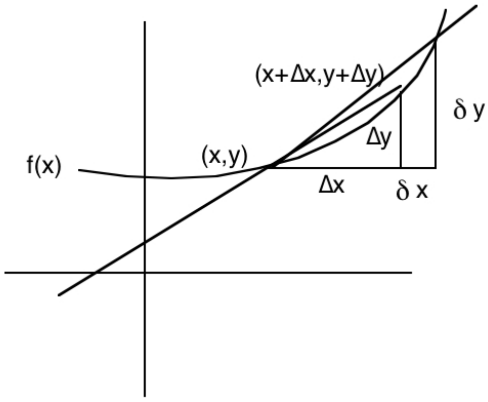


Uno de los significados que se atribuye a la expresión. “esta cuesta tiene una pendiente del 5%” es que cada 100 metros que se avanza en horizontal se sube una altura de 5 metros. Si expresamos la pendiente en tantos por uno, una pendiente del 5% es una pendiente de $5/100 = 0.05$. Expresado gráficamente, si representamos la cuesta por una recta del plano como la de la figura, su pendiente es el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, que es el mismo en todo punto (x, y) de la recta y que tampoco depende del valor de Δx que se tome.

Para ver la relación entre la pendiente de una recta en el plano y su ecuación en implícitas, recordemos que esta ecuación es, en general, de la forma $a\,x + b\,y = c$, de donde $y = m\,x + n$ con $m = -\dfrac{a}{b}$, $n = \dfrac{c}{b}$. La pendiente de una recta con esta ecuación es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x).x} = \frac{(m(x+\Delta x)+n)-(mx+n)}{(x+\Delta x)-x} = m.$$

Si ahora queremos definir la pendiente de una función f (de la gráfica de una función f) vemos en la figura adjunta que no es posible definirla como en el caso de una recta, pues la pendiente en un punto $(x, y = f(x))$ depende del valor de Δx, pues se observa que, para esta función de la figura adjunta, $\Delta y/\Delta x \neq \delta y/\delta x$. La solución, para tener una pendiente bien definida, es tomar el límite de ese cociente cuando $\Delta x \to 0$, es decir: Pendiente (de f en x) $= \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $= \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, y es fácil reconocer en la última expresión la derivada de f en x, $f'(x)$.

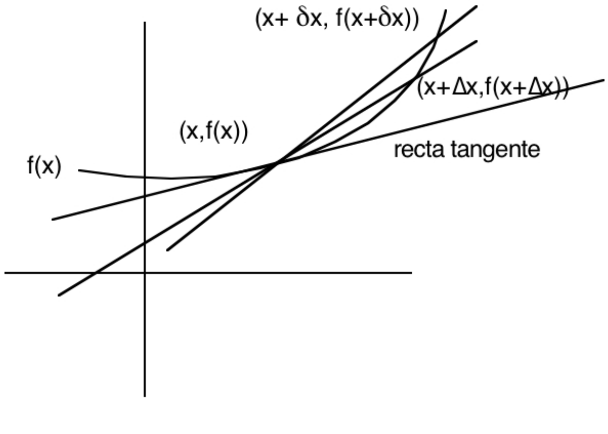


Por otro lado, la recta tangente a la función f en el punto x se define como el límite de la rectas que pasan por $(x, f(x))$ y $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ cuando $\Delta x \to 0$. Vamos a calcular la ecuación de esta recta. Comenzamos considerando la recta que pasa por $(x, f(x))$ y $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Si $(\overline{x}, \overline{y})$, son las coordenadas de un punto genérico de la recta, su ecuación es $\dfrac{\overline{x}-x}{\Delta x} = \dfrac{\overline{y}-f(x)}{f(x+\Delta x)-f(x)}$, de donde se obtiene $\overline{y} - f(x) = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}(\overline{x}-x)$, que podemos poner en la forma estándar $y = mx + n$ así: $\overline{y} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\overline{x} + f(x) - \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}x$.

Para obtener la **ecuación de la recta tangente**, tomamos límites cuando $\Delta x \to 0$, y obtenemos

$$\overline{y} = f'(x)\,\overline{x} + \big(f(x) - f'(x)\,x\big)\,, \tag{5.2}$$

ecuación que muestra que $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a f (a la gráfica de f) en x.



Obsérvese, además, que la recta tangente (5.2) a la gráfica de la función f en el punto x es la gráfica de la función afín

$$\begin{aligned}\overline{y} :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\ &\overline{x} \mapsto \overline{y}(\overline{x}) = f'(x)\,\overline{x} + b,\end{aligned}$$

con $b = (f(x) - f'(x)\,x$, que es la función afín -de entre las que toman el mismo valor que f en el punto x ($\overline{y}(x) = f(x)$)- que más se aproxima a la función f para valores de $\overline{x}$ próximos a x, y que tiene por aplicación lineal asociada $f'(x)$. Con otras palabras: la derivada de una función en un punto es la aplicación lineal asociada a la aplicación afín que mejor aproxima la función f en las proximidades de x, es decir a la aproximación afín de f en x, que, por abuso de lenguaje, se llama **aproximación lineal de** f en x.

Veamos dos ejemplos de rectas tangentes:

• Recta tangente a la gráfica de la función $y = 4 + \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/4$. Como la pendiente de esa recta es $y'(\pi/4) = \cos\pi/4 = \sqrt{2}/2$, la ecuación de la recta tangente será de la forma $y = \sqrt{2}/2\ x + n$, y esta recta pasa por el punto $(\pi/4, y(\pi/4)) = (\pi/4, 4 + \sqrt{2}/2)$, luego $n = y - \sqrt{2}/2\ x = (4 + \sqrt{2}/2) - (\sqrt{2}/2)(\pi/4) = (16\sqrt{2} + 4 - \pi)/4\sqrt{2}$, y la ecuación de la recta tangente que buscábamos es

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{16\sqrt{2} + 4 - \pi}{4\sqrt{2}}.$$

• Recta tangente a la gráfica de la función $y = 1 + x^2$ en $x = 0$. Calculando como antes, tenemos $m = y'(0) = 2x = $ —en $x = 0$— $= 0$, e $y(0) = 1$, de donde $n = y - m\ x = 1 - 0 = 1$, y la ecuación de la recta tangente es

$$y = 1.$$

Si nos interesa la **ecuación de la recta normal** a la gráfica de la función $f(x)$ en un punto x, tenemos en cuenta que si $m = \operatorname{tg}\theta$ es la pendiente de la recta tangente, la pendiente de la normal será $\operatorname{tg}(\theta + \pi/2) = -\cot\theta = -1/m$. El lector puede, como ejercicio, calcular la recta normal a las gráficas de las funciones anteriores en los puntos en los que hemos calculado su recta tangente.

5.2 Solución aproximada de ecuaciones (métodos numéricos).

Vamos a ver dos métodos iterativos de encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones de la forma

$$f(x) = 0 \tag{5.3}$$

y de estimar el error cuando f admite hasta la segunda derivada contínua. La primera observación que hay que hacer es que la ecuación (5.3) puede no tener ninguna solución, o tener infinitas. Los métodos que vamos a ver dan buen resultado cuando buscamos soluciones de (5.3) para x variando en un intervalo en el que f es monótona (es decir, creciente o decreciente) y que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo. En este caso se puede asegurar (el lector puede convencerse fácilmente dibujando una función arbitraria que cumpla estas condiciones) que existe una solución única de (5.3), y los métodos que vamos a ver permiten encontrarla con tanta precisión como se quiera.

Supongamos, por tanto, que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que admite segunda derivada en todo punto y tal que $f(a)\ f(b) < 0$.

Método de regula falsi. Tomamos la función $L_0(x) = mx + n$ cuya gráfica es el segmento de recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$, por lo tanto, cuyos coeficientes m y n satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} f(b) & = & mb + n \\ f(a) & = & ma + n \end{array}\right\},$$

que, resolviéndolas, dan lugar a la siguiente expresión de $L_0(x)$:

$$L_0(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a},$$

y la solución de $L_0(x) = 0$, que es

$$x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)},$$

es una primera aproximación a la solución ζ de la ecuación (5.3). El error que se comete al tomar x_0 como solución, es decir, el valor del módulo de la diferencia $|x_0 - \zeta|$, se puede acotar por arriba usando el teorema del valor medio, y la cota que se obtiene es

$$|x_0 - \zeta| \leq \frac{M}{2m} |x_0 - a||x_0 - b|,$$

siendo $M = \sup\{|f''(x)|;\ x \in]a, b[\}$ y $m = \inf\{|f'(x)|;\ x \in]a, b[\}$.

Una vez obtenida esta primera aproximación, se consideran los intervalos los valores $f(a)$, $f(x_0)$ y $f(b)$. Si $f(a)$ y $f(x_0)$ tienen signo opuesto, se repite el proceso anterior en el intervalo $[a, x_0]$ para obtener una nueva aproximación x_1. Si $f(a)$ y $f(x_0)$ tienen el mismo signo, entonces $f(x_0)$ y $f(b)$ tienen signo opuesto, y se repite el proceso anterior en el intervalo $[x_0, b]$ para obtener una nueva aproximación x_1 (este es el caso en el ejemplo gráfico que se muestra en la figura adjunta). Así se sigue hasta que se obtenga una cota superior del error del orden que interese.

Método de Newton. Supongamos ahora f definida sobre $[a - (b - a), b]$. Tomamos la función $L_0(x) = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$ cuya gráfica es la recta tangente a la gráfica de f en a, y la solución de $L_0(x) = 0$, que es

$$x_0 = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

es una primera aproximación a la solución ζ de la ecuación (5.3). En este caso es más difícil obtener el cálculo del error, pero se puede demostrar que, si $m = \inf\{|f'(x)|;\ x \in]a - (b - a), b[\} > 0$ y se verifica que que

$$f(a) \leq \frac{b - a}{2}\, m, \qquad |f'(x) - f'(y)| \leq \frac{1}{2}\, m \quad \text{para todo } x, y \in [a - (b - a), b],$$

entonces el error que se comete al tomar x_0 como solución se puede acotar superiormente por

$$|x_0 - \zeta| \leq b - a.$$

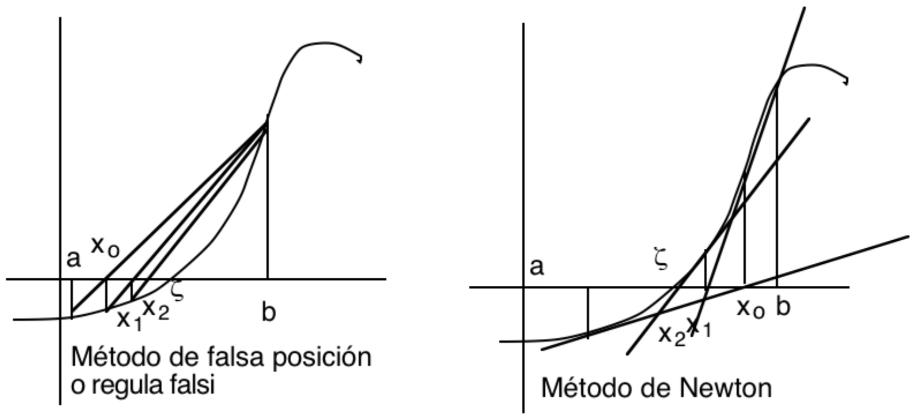
Una vez obtenida esta primera aproximación, se repite el proceso tomando la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Al cabo de n iteraciones se obtiene el valor

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

y la cota superior del error es

$$|x_n - \zeta| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

Como consecuencia de que es necesario que se cumplan unas hipótesis sobre la derivada de f para que la cota superior del error cometido tienda a 0 cuando el número de iteraciones tiende a infinito, ocurre en la práctica que si la primera elección de a no está suficientemente próxima a la raíz (o cero) verdadero ζ de f, el método puede fallar y la sucesión $x_=, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ puede no converger.



Como ejemplo, vamos a calcular una solución aproximada de la ecuación $x^2 = 5$ usando el método de Newton (que es lo mismo que encontrar un valor decimal aproximado para $\sqrt{5}$). Nuestra función es $f(x) = x^2 - 5$. Su derivada es $f'(x) = 2x$. Comenzamos tomando $a = 2$. Entonces

$$x_0 = 2 - \frac{f'(2)}{f(2)} = 2 - \frac{-1}{4} = 2'25 \tag{5.4}$$

$$x_1 = 2'25 - \frac{f'(2'25)}{f(2'25)} = 2'25 - \frac{(2'25)^2 - 5}{4'5} = 2'236... \tag{5.5}$$

En el intervalo $[1'5, 2'5]$ se verifica que $|f'(x)| = 2|x| \geq 2(1'5)^2$, $f(2) = -1 \leq \frac{0'5}{2} 2(1'5)^2$ y $|f'(x) - f'(y)| = 2|x - y| \leq 2 \leq (1'5)^2$, luego el error cometido al tomar el punto x_0 es menor que $0'5$ y el error cometido al tomar el punto x_1 es menor que $0,25$. En realidad el error es mucho menor, como se puede comprobar mirando la expresión de $\sqrt{5}$ en una calculadora.

5.3 Derivadas de funciones de varias variables

Comenzaremos estudiando la **derivada de una curva** $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en un punto t_0 interior de I. Puesto que tenemos una definición de derivada para funciones reales de una variable, la primera idea será ver si la misma definición que dimos en ese caso puede servir aquí. Afortunadamente la definición analítica se generaliza sin dificultad. Si miramos aquella definición, no tenemos más que cambiar f por c para escribir (lo que será nuestra definición):

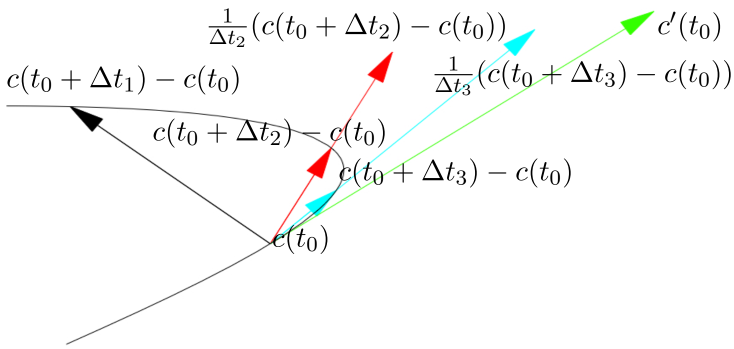
$$\frac{dc}{dt}(t_0) \equiv c'(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t_0 + \Delta t) - c(t_0)}{\Delta t},$$

que tiene perfecto sentido (aunque el límite puede no existir) por estar bien definida la diferencia en $\mathbb{R}^m$, así como el cociente de un vector por un escalar.

Cuando $c'(t_0)$ existe, se dice que c es derivable en t_0, y se dice que es derivable o diferenciable en I si lo es en cada punto interior de I. De esta definición de derivada y de la propiedad para el límite de una función con valores en $\mathbb{R}^m$ se deduce que, si $c(t) = (x_1(t), ..., x_m(t))$,

$c'(t) = (x_1'(t), ..., x_m'(t))$.

Geométricamente, $c'(t)$ se interpreta como la **velocidad o el vector tangente** de la curva $c(t)$. En efecto, obsérvese en la figura como los segmentos $\dfrac{c(t_0+\Delta t_i) - c(t0)}{\Delta t_i}$ se aproximan al vector tangente $c'(t_0)$ a medida que Δt_i se va haciendo menor.

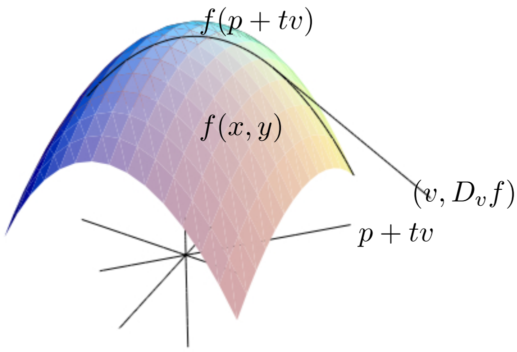


La curva de la figura es $c(t) = (t\cos t, \operatorname{sen} t)$ y el vector tangente dibujado es $c'(1/2) = (-1/2\operatorname{sen}(1/2) + \cos(1/2), \cos(1/2))$

Vamos a tratar ahora de definir derivadas para funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ para $n > 1$. Puesto que una derivada mide una variación y sabemos medir variaciones de funciones definidas sobre una recta (eso son las curvas), comenzaremos definiendo la derivada de f cuando la consideramos restringida a una recta (o segmento de recta) contenida en su dominio. Esta será la **derivada direccional** que pasamos a definir.

Dada $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sea $p \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n$, definimos la derivada direccional $D_v f$ de f en p en la dirección de v como

$$D_v f = \frac{df(p+tv)}{dt}(0).$$



Obsérvese que, puesto que $t \mapsto f(p+tv)$ es una curva en $\mathbb{R}^m$, la derivada anterior tiene sentido. En el dibujo a continuación se muestra la recta $p+tv$ sobre el plano XY, la gráfica de una función $f(x,y)$, la curva $f(p+tv)$ y el vector $D_v f$ con origen en p cuya pendiente da el valor de $D_v f$. Como ejemplo, calculemos la derivada direccional de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (xy, x-y)$. Para $v = (1,1)$ y $p = (1,0)$, se tiene $f(p+tv) = (t+t^2, 1)$ y $D_v f(p) = (t+t^2, 1)'(0) = (1+2t, 0)(0) = (1,0)$.

Las derivadas direccionales en la dirección de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ se llaman **derivadas parciales**. Con más precisión: Si $e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$, ... , $e_n = (0,0,...,0.1)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función derivable, y

$\in \mathbb{R}^n$, se llama derivada parcial de f con respecto a x_i (la coordenada *i*ésima) en p a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = D_{e_i} f(p).$$

El nombre de derivada parcial está relacionado con el modo de calcularla a que conduce la definición anterior. En efecto, si continuamos escribiendo, después de la definición, la expresión para $D_{e_i} f(p)$, usando la notación $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{df(p_1, ..., p_i + t, ..., p_n)}{dt}(0),$$

y, aplicando la regla de la cadena (propiedad xiii de la pag.55) de la derivada de funciones de una variable, se tiene que el cálculo de la última derivada es equivalente a calcular la derivada de f respecto de la variable x_i como si las demás fueran constantes. así, por ejemplo: si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por $f(x, y) = (xy, x - y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y, 1), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = (1, 1) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x, -1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = (1, -1).$$

La derivada direccional (y, por lo tanto, la derivada parcial) mide la variación de una función en una dirección dada. Buscamos ahora una generalización del concepto de derivada que mida la variación de la función en todas las direcciones, esta será la **diferencial de una función** derivable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, que se define como la aplicación

$$df(p) \equiv df_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } df_p(v) = D_v f(p) \equiv (D_v f)(p) \equiv (D_v f)_p.$$

Usando la definición de derivada direccional, es fácil demostrar que la diferencial $df(p) \equiv df_p$ de f en un punto es lineal, es decir, que verifica:

$df_p(v + w) = df_p(v) + df_p(w)$, y

$df_p(\lambda v) = \lambda df_p(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como tal aplicación lineal, elegidas una base del espacio de partida y otra del de llegada, viene representada por una matriz. Vamos a ver cual es esa matriz cuando tomamos en $\mathbb{R}^n$ (el espacio de partida) y en $\mathbb{R}^m$ (el espacio de llegada), las respectivas bases canónicas $\{e_1, ..., e_n\}$ y $\{e_1, ..., e_m\}$. Según lo visto cuando estudiamos aplicaciones lineales[1], la matriz

[1] En el curso 2006-2007 la matriz de una aplicación lineal la calculábamos de otra manera, según esta manera de calcular la demostración que sigue a continuación quedaría así:

$$\begin{aligned}
&df_p(v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n) = v_1df_p(e_1) + v_2df_p(e_2) + ... + v_ndf_p(e_n) \\
&\quad = (v_1df_p(e_1)_1, v_1df_p(e_1)_2, ..., v_1df_p(e_1)_m) + (v_2df_p(e_2)_1, v_2df_p(e_2)_2, ..., v_2df_p(e_2)_m) \\
&\quad\quad + ... + (v_ndf_p(e_n)_1, v_ndf_p(e_n)_2, ..., v_ndf_p(en)_m) \\
&\quad = (v_1df_p(e_1)_1 + v_2df_p(e_2)_1 + ... + v_ndf_p(e_n)_1, \\
&\quad\quad v_1df_p(e_1)_2 + v_2df_p(e_2)_2 + ... + v_ndf_p(e_n)_2, \\
&\quad\quad .... \\
&\quad\quad v_1df_p(e_1)_m + v_2df_p(e_2)_m + ... + v_ndf_p(e_n)_m)
\end{aligned}$$

y, según lo visto cuando estudiábamos aplicaciones lineales, la matriz de esta aplicación es (5.6) de la aplicación lineal df_p se obtiene escribiendo como columnas las componentes de las imágenes de la base de $\mathbb{R}^n$, es decir, si

$$f(x_1,...,x_n) = (y_1(x_1,...,x_n), y_2(x_1,...,x_n),...,y_m(x_1,...,x_n)),$$

y teniendo en cuenta que $df_p(e_j) = D_{e_j}f(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$,

$$\text{Matriz de } df_p = \begin{pmatrix} df_p(e_1)_1 & df_p(e_2)_1 & ... & df_p(e_n)_1 \\ df_p(e_1)_2 & df_p(e_2)_2 & ... & df_p(e_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ df_p(e_1)_m & df_p(e_2)_m & ... & df_p(e_n)_m \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}(p) & ... & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}(p) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}(p) & ... & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2}(p) & ... & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

en particular, cuando $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$df_p = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(p) & ... & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

Puesto que tenemos un modo de calcular explícitamente la matriz de df_p, será muchas veces más cómodo, para calcular $D_v f$, calcular primero la matriz de df y, a continuación, aplicar esa matriz a v, obteniendo así $D_v f = df(v)$. Veamos algunos ejemplos:

- Calcular $df_{(x,y)}$ y $(D_{(1,1)}f)_{(x,y)}$ para la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2,\ \operatorname{sen}(xy))$. Calculamos primero:

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y\ \cos(xy) & x\ \cos(xy) \end{pmatrix},$$

y, usando esta expresión matricial de $df_{(x,y)}$,

$$(D_{(1,1)}f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y\ \cos(xy) & x\ \cos(xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ (x+y)\cos(xy) \end{pmatrix}.$$

Si ahora queremos saber lo que valen la diferencial y la derivada direccional anteriores en el punto $(1,\pi)$, no hay más que sustituir $x = 1$ e $y = \pi$, resultando

$$df_{(1,\pi)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\pi & -1 \end{pmatrix}; \quad (D_{(1,1)}f)_{(1,\pi)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\pi - 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcular $df_{(1,0,1)}$ y $(D_{(0,1,1)}f)_{(1,0,1)}$ para la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (xz,\ e^{xy})$. Calculamos primero $df_{(x,y,z)}$ y sustituimos (x, y, z) por $(1, 0, 1)$:

$$df_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y\ e^{xy} & x\ e^{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

y, sustituyendo en $(1, 0, 1)$,

$$df_{(1,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y la derivada direccional será

$$(D_{(0,1,1)}f)_{(1,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, (que denotaremos $f(x)$), df_p en un punto (que ahora es número real) $p \in \mathbb{R}$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, luego viene dada por una matriz 1×1, es decir, por un número real. Si calculamos ese número real por el procedimiento que acabamos de ver, será $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p) = \dfrac{df}{dx}(p) = f'(p)$, por lo tanto $df_p(u) = f'(p)u$, es decir, la diferencial de una función $f(x)$ real de una sola variable real en un punto p es la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que actúa sobre un número multiplicándolo por $f'(p)$.

Para el caso $m = 1$ (y n arbitrario) hay un vector relacionado con la diferencial que es muy importante, tanto por su utilidad para calcular derivadas direccionales, como por su interpretación como dirección en la que se da la máxima variación de la función. Es el **gradiente de una función** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que se define como el vector $\operatorname{grad} f$, también denotado como ∇f, cuyas componentes son las mismas de la matriz de df, es decir.

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

y su valor en cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ se escribe así:

$$\operatorname{grad} f_p \equiv \operatorname{grad} f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

Su utilidad para calcular la derivada direccional procede del siguiente cálculo, que lo haremos sin especificar el punto p en que estamos calculando, es decir, escribiremos $\operatorname{grad} f$, df y $D_v f$ en lugar de $\operatorname{grad} f(p)$, df_p y $(D_v f)_p$:

$$D_v f = df(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$= (v_1, v_2, ..., v_n). \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = v. \operatorname{grad} f.$$

Además, ésta misma fórmula nos va a permitir obtener la interpretación del gradiente como dirección de máxima variación. Aclaremos primero qué quiere decir eso de variación. Recordando la definición de derivada direccional $D_v f(p) = \frac{df(p+tv)}{dt}(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(p+\Delta t\ v) - f(p)}{\Delta t}$, vemos que ésta da una medida de lo que varía f en la dirección v, y, para comparar la variación según distintas direcciones marcadas por distintos vectores, necesitamos que esos vectores tengan el mismo módulo, por eso,

$$\textit{la variación de } f \textit{ en la dirección de } v \textit{ viene dada por } \left| D_{\frac{v}{|v|}} f \right|.$$

Aclarado este concepto, vamos a ver que

Proposición 5.1 *Si f es una función derivable sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{grad} f$ da, en cada punto, la dirección de máxima variación de f, es decir*

$$\left| D_{\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}} f \right| \geq |D_v f| \ \textit{ para todo } v \textit{ tal que } |v| = 1.$$

En efecto Por la fórmula anterior,

$$|D_v f| = |v. \operatorname{grad} f| \leq |v| |\operatorname{grad} f| = |\operatorname{grad} f| = \left| \operatorname{grad} f. \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right| = \left| D_{\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}} f \right|,$$

como queríamos demostrar.

Veamos un ejemplo: ¿Cuál es la dirección de máxima variación de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy$ en el punto $(3,4)$. ¿Cuál es esta variación?. La dirección de máxima variación será la de

$$\operatorname{grad} f = (y, x),$$

y la máxima variación en ese punto será

$$\left| D_{\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}} f \right| = \left| \operatorname{grad} f. \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right| = |\operatorname{grad} f| = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Vamos a estudiar ahora como es la diferencial de una composición de funciones en términos de las diferenciales de cada función. Es la llamada

Teorema 5.2 *(**Regla de la cadena**) Se consideran las funciones f y g como en el diagrama siguiente*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^k \\ x & \longmapsto & y = f(x) & \longmapsto & z = g(y) = g(f(x)) \end{array}$$

Para cada $p \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p,$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_\ell} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_\ell}; \qquad \textit{para } 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq \ell \leq k.$$

Es instructivo ver la equivalencia entre las dos expresiones de la regla de la cadena. Partiremos de la primera y llegaremos a la segunda por una serie de pasos reversibles.

Si escribimos la primera expresión usando las matrices de esas aplicaciones, tenemos, sin explicitar el punto en el que calculamos,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \frac{\partial z_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \frac{\partial z_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_1}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_1}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_1}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_2}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_2}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_2}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

que es equivalente a la segunda expresión escrita más arriba para la regla de la cadena.

Veamos un ejemplo. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $(u(x,y,z), v(x,y,z)) \equiv f(x,y,z) = (x^2y, y^2z)$ y $(s(u,v), t(u,v)) \equiv g(u,v) = (\operatorname{sen}(uv), \cos(uv))$. Vamos a calcular $\frac{\partial s}{\partial x}$ aplicando la regla de la cadena y sin aplicarla, y comprobaremos que sale lo mismo;

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = v\cos(uv)2xy + u\cos(uv)\cdot 0 = 2xy^3z\cos(x^2y^3z).$$

Y, sin aplicar la regla de la cadena, calculando $s(x,y,z) = \operatorname{sen}(u(x,y,z)v(x,y,z)) = \operatorname{sen}(x^2y^3z)$ y derivando en esta expresión,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = y^3z2x\cos(x^2y^3z).$$

Naturalmente, este es un ejemplo en el que es mejor calcular directamente que aplicar la regla de la cadena. Pero hay muchos casos en que no es así. La regla de la cadena resulta especialmente interesante en combinación con los teoremas de la función inversa y de la función implícita.

5.4 Diferencial de la función inversa

Recordemos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva si cada punto del espacio de llegada tiene una antiimagen única, es decir, si $f(X) = \{y = f(x); x \in X\} = Y$ y $f(x) = f(y)$

si y solo si $x = y$. Cuando una aplicación es biyectiva, existe su inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, que verifica $f(f^{-1}(y)) = y$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

Nos interesamos ahora en el estudio de aplicaciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que son biyectivas y derivables y tienen inversa que también es derivable. Queremos averiguar si existe alguna relación entre las aplicaciones que verifiquen estas condiciones y la biyectividad de df.

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable con inversa diferenciable. Tenemos las aplicaciones

$$Id_{\mathbb{R}^n} = f^{-1} \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad Id_{\mathbb{R}^m} = f \circ f^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

y, si calculamos su diferencial, tenemos

$$dId_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1} & \frac{\partial x_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = Id_{\mathbb{R}^n},$$

y, análogamente, $dId_{\mathbb{R}^m} = Id_{\mathbb{R}^m}$, de donde resulta, aplicando la regla de la cadena, si $q = f(p)$, que

$$df_q^{-1} \circ df_p = Id_{\mathbb{R}^n} \text{ y } df_p \circ df_q^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n},$$

luego df_p es biyectiva (pues admite una inversa), y su inversa es

$$(df_p)^{-1} = df_q^{-1}. \tag{5.10}$$

Es decir, *si una función es diferenciable con inversa diferenciable, entonces su diferencial es una aplicación lineal que tiene inversa, y la inversa de su diferencial es la diferencial de su inversa.*

Si una aplicación lineal tiene inversa, su matriz asociada también, luego es una matriz cuadrada regular, luego la imagen de la aplicación lineal tiene la misma dimensión que el espacio de partida. Por lo tanto, si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable con inversa diferenciable, entonces $n = m$.

El teorema de la función inversa (cuyo enunciado preciso no estudiaremos en este curso) dice que el recíproco del resultado anterior es cierto al menos para un conjunto de puntos cercanos al punto en que la diferencial sea una aplicación lineal biyectiva.

Estos resultados que acabamos de comentar (especialmente la fórmula (5.10)) permiten calcular la diferencial o las derivadas parciales de la aplicación inversa sin necesidad de calcular explícitamente la expresión de la función inversa (cosa ésta que en muchos casos no seremos capaces de hacer). Veamos algunos ejemplos:

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $f(x, y) = (\text{sen}(xy), \cos(xy))$. Si calculamos su diferencial

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y\ \cos(xy) & x\ \cos(xy) \\ -y\ \text{sen}(xy) & -x\ \text{sen}(xy) \end{pmatrix},$$

vemos que su determinante $\det df_{(x,y)} = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego $df_{(x,y)}$ no es biyectiva en ningún punto, luego f no tiene inversa en ningún conjunto del plano y no podemos calcular, ni la diferencial de su inversa ni sus derivadas parciales, pero no porque no sepamos, sino porque no existe.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, con $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = x^2 - y^2$. Como antes, calculamos

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\ x & 2\ y \\ 2\ x & -2\ y \end{pmatrix},\ \text{y}\ \det df_{(x,y)} = \begin{vmatrix} 2\ x & 2\ y \\ 2\ x & -2\ y \end{vmatrix} = -8\ x\ \ y,$$

que se anula si y solo si $x = 0$ ó $y = 0$. Luego, para todo punto (x, y) del plano en el que ambas coordenadas son distintas de cero existe un conjunto conteniendo a ese punto sobre el que f tiene inversa diferenciable. La diferencial de esa inversa es

$$df^{-1}_{(u(x,y),v(x,y))} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\ x} & \frac{1}{4\ x} \\ \frac{1}{4\ y} & -\frac{1}{4\ y} \end{pmatrix},\ \text{de donde}\ \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{4\ x},\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{4\ x},\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{4\ y},\ \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{4\ y},$$

c) Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(r, \theta) = (r\ \cos\theta, r\ \operatorname{sen}\theta)$, (que define las coordenadas polares (r, θ) de un punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$, que estudiaremos con más detalle en un capítulo posterior sobre integración). ¿Cuál es la expresión de las derivadas parciales de r y θ respecto de x e y en los puntos en que existe la función inversa?. Como antes, calculamos la matriz de df y de su inversa:

$$df^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix},$$

de donde

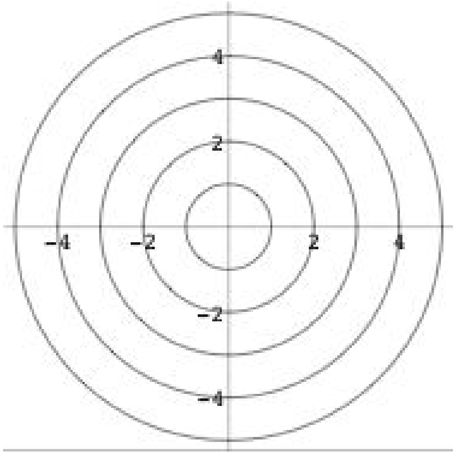
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta.$$

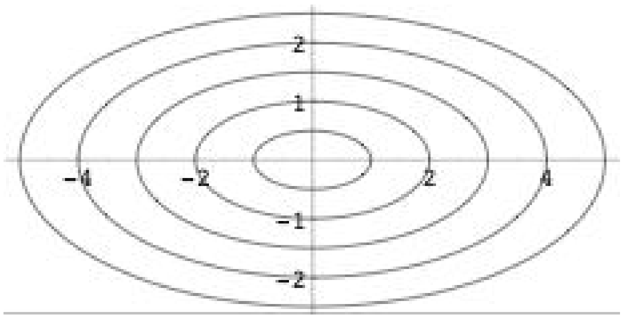
5.5 Curvas y superficies de nivel. Funciones definidas en forma implícita.

Un caso especialmente importante de antiimagen de un punto por una función es el de las curvas, superficies o hipersuperficies de nivel.

Consideremos primero una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in \mathbb{R}$. Una **curva de nivel** de f es el conjunto $C = f^{-1}(c)$, donde $c \in \mathbb{R}$. Dicho de otra manera: es el conjunto de puntos $/x, y) \in \mathbb{R}^2$ solución de una ecuación de la forma $f(x, y) = c$, donde c es una constante.

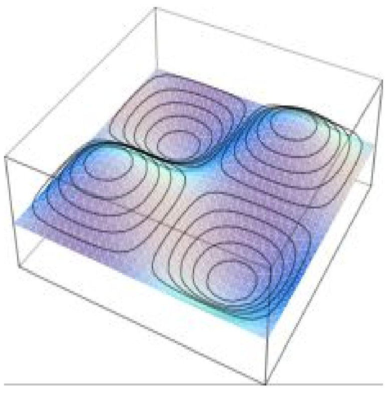
Así, por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel de f son, para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican $x^2 + y^2 = c$, es decir, una circunferencia de radio $\sqrt{c}$ si $c > 0$, el punto $(0, 0)$ si $c = 0$, y el conjunto vacío si $c < 0$ (en la figura de la izquierda están dibujadas las curvas de nivel para $c = 1, 4, 9, 16, 25$).

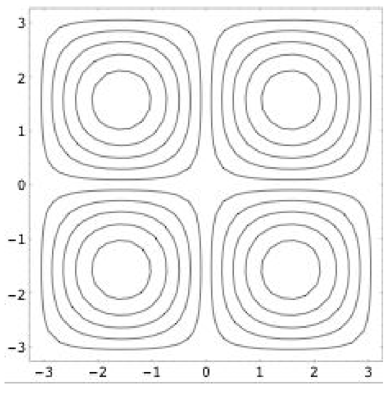




Si $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, las curvas de nivel de f son, para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican $x^2 + 4y^2 = c$, es decir, una elipse si $c > 0$, el punto $(0,0)$ si $c = 0$, y el conjunto vacío si $c < 0$ (en la figura de arriba a la derecha están dibujadas las curvas de nivel para $c = 1, 4, 9, 16, 25$).

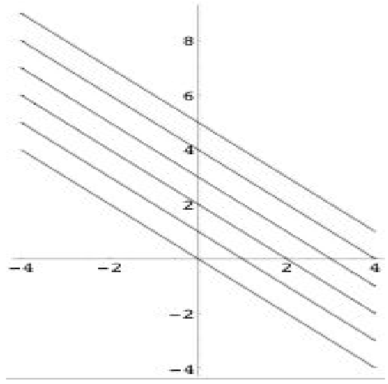
El nombre de curva de nivel proviene de la Cartografía. Si consideramos el terreno representado por el mapa como un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ y consideramos la altura h como una función $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada punto de ese terreno le hace corresponder su altura, entonces las curvas de nivel de h son las llamadas curvas de nivel en Cartografía: curvas que unen los puntos del mapa que están a la misma altura.

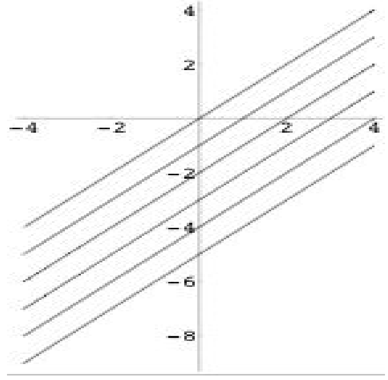




Las curvas de nivel no tienen por qué ser cerradas, como muestran los siguientes simples ejemplos: Si $f(x,y) = x + y$, las curvas de nivel de f son, para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican $x + y = c$, es decir, las rectas $y = c - x$ (ver figura de abajo a la izquierda).

Si $f(x,y) = x - y$, las curvas de nivel de f son, para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican $x - y = c$, es decir, las rectas $y = x - c$ (ver figura de abajo a la derecha).





Dada una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama **superficie de nivel de** f a cada uno de los conjuntos S de puntos solución de una ecuación de la forma $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante, es decir, a cada uno de los conjuntos $f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

En general, dada $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama hipersuperficie de nivel de nivel de f a cada uno de los conjuntos $f^{-1}(c)$, para $c \in \mathbb{R}$, o, lo que es lo mismo, a cada uno de los conjuntos de soluciones de las ecuaciones $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$.

Las curvas de nivel están relacionadas (la misma práctica de los ejercicios hará ver como) con un modo especial de definir las funciones: **las funciones definidas de modo implícito**. Se entienden por tales las funciones que se obtienen como solución de una ecuación. Naturalmente, el que esa función esté definida depende de que exista solución de la mencionada ecuación y, en este caso, se dice que la función está implícitamente definida por la ecuación. Así, en general, si f es una función de dos variables, una ecuación de la forma $f(x, y) = c$, donde c es una constante, define, de modo implícito, una función $y = g(x)$, que es la solución, si existe, de la ecuación $f(x, y) = c$. Si esta ecuación tiene varias soluciones, entonces define varias funciones de modo implícito, y harán falta otras condiciones si queremos determinar una sola entre todas esas funciones. Veamos como ejemplos las funciones definidas de modo implícito por las curvas de nivel vistas hasta ahora:

La ecuación

$$x^2 + y^2 = c \tag{5.11}$$

define, de modo implícito, dos funciones $y = g(x)$ si y solo si $c > 0$. En efecto, si $c < 0$, la ecuación (1.5.1) no tiene ninguna solución, pues la suma de los cuadrados de dos números no puede ser negativa. Si $c = 0$, la única solución de (1.5.1) es $y = 0 = x$, lo que no define ninguna función. Si $c > 0$, despejando de (1.5.1), tenemos $y = \pm\sqrt{c - x^2}$, lo que define dos funciones

$$g_+ : [-\sqrt{c}, \sqrt{c}] \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ y } \ g_- : [-\sqrt{c}, \sqrt{c}] \longrightarrow \mathbb{R},$$

por las fórmulas

$$y = g_+(x) = \sqrt{c - x^2} \ \text{ y } \ y = g_-(x) = -\sqrt{c - x^2}.$$

La función g_+ es la única de las dos definidas implícitamente que tiene valores estrictamente positivos, y la función g_- es la única de las dos definidas implícitamente con valores estrictamente negativos.

La ecuación

$$x - y = c \tag{5.12}$$

define, de modo implícito, una función $y = g(x)$ cualquiera que sea el vqlor de c. En efecto, despejando de (5.12), tenemos $y = x - c$, lo que define la funciones

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } y = g(x) = x - c,$$

y esta es la función definida implícitamente por (5.12).

Ejercicios

1. Calcula las curvas de nivel de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = x + y + 1$. b) $g(x, y) = x^2 - y^2$,

   así como las funciones implícitas definidas por cada una de esas curvas de nivel

2. Calcula las superficies de nivel de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$. b) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

   así como las funciones implícitas definidas por cada una de esas curvas de nivel

5.6 Diferencial de una función definida de modo implícito

Vamos a ver ahora como estudiar las **funciones definidas de modo implícito**. Veamos un ejemplo de lo que se entiende por una función implícita o definida de modo implícito.

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, y sea r^2 una constante. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ define de modo implícito una función $z = z(x, y)$ que verifica esta ecuación, es decir, tal que $x^2 + y^2 + z(x, y)^2 = r^2$. En este caso sencillo, esta función z se puede obtener despejando de la anterior ecuación, de modo que se obtiene $z(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ y $z(x, y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ (en realidad, pues, la ecuación anterior define implícitamente dos funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$).

No siempre es fácil o posible despejar (obtener explícitamente) una función $z(x, y)$ a partir de una ecuación $f(x, y, z(x, y)) = c$, así es que es interesante conocer condiciones que permitan asegurar que esta función $z(x, y)$ existe. Este es el contenido del teorema de la función implícita, que en este curso tampoco estudiaremos con detalle, sino que trabajaremos casi siempre con funciones que cumplen las condiciones de ese teorema, como consecuencia de las cuales se tiene que:
si tenemos un sistema de m ecuaciones (definidas por funciones cumpliendo las condiciones del teorema) con n incógnitas y $n > m$, entonces podemos despejar m incógnitas en función de las otras $p = n - m$. O, dicho de otra manera,

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable y $n = p + m$, casi siempre estaremos en el caso en que la ecuación $f(x, y) = C$ (con $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^m$ define una función (no única) $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x, g(x)) = C$ para todo $x \in U$.

La función g que verifica las condiciones anteriores se suele elegir, entre todas las posible, como aquella cuya gráfica contiene a cierto punto (a, b) solución de la ecuación $f(x, y) = c$ (es decir, verificando $f(a, b) = C$), es decir, como aquella g que verifica $g(a) = b$. Así, en el ejemplo anterior en que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (por tanto $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$) y la ecuación era $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, vimos que había dos posibles funciones $z(x, y)$ definidas por esta ecuación, $z(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ y $z(x, y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Para $a = (0, 0)$, $b = r$ sale la $z(x, y)$ positiva y, para $a = (0, 0)$, $b = -r$, sale la $z(x, y)$ negativa.

Vamos a ver otro ejemplo: $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z, w) = (x + z, y + w)$. Si $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$, $f(a, b) = (1, 1)$. Entonces $f(x, y, z, w) = (1, 1)$ define (z, w) como función de $x, y)$. Podemos obtener esta función simplemente despejando (z, w) en el sistema de ecuaciones definido por $(x + z(x, y), y + w(x, y)) = (1, 1)$, lo que da $z = 1 - x$, $w = 1 - y$.

En los ejemplos anteriores ha sido fácil obtener expresiones explícitas de funciones definidas de modo implícito. En general no es así, podemos saber que un sistema de ecuaciones define una función de modo implícito, pero no conocer la expresión explícita de esa función. La regla de la cadena permite calcular la diferencial (equivalentemente, las derivadas parciales) de una función definida de manera implícita sin necesidad de conocer su expresión explícita. El procedimiento es el siguiente:

Dada la función $y = y(x)$ definida de manera implícita por $f(x, y) = c$, para calcular $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$, hacemos:

Puesto que $f(x, y) = c$, al derivar el miembro derecho de la igualdad sale 0 por ser c constante, luego lo mismo ha de ocurrir en el izquierdo, y, derivando con la aplicación de la regla de la cadena, si se define $h(x) = f(x, y(x))$, tenemos:

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, ..., m, \tag{5.13}$$

que es un sistema de ecuaciones lineales del que puedo obtener los valores de $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Así, en el último ejemplo visto, el sistema de ecuaciones (5.13) para calcular la parcial respecto de x es

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x} & = 0 \end{array}\right\}, \text{ de donde } \left.\begin{array}{ll} 1 + 1\ \dfrac{\partial z}{\partial x} + 0\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & = 0 \\ 0 + 0\ \dfrac{\partial z}{\partial x} + 1\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & = 0 \end{array}\right\}, \text{ y } \left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = -1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & = 0 \end{array}\right\}.$$

Veamos otro ejemplo: Dada la ecuación $x^2 + yx + x \operatorname{sen} z = 1$, sea $z = z(x, y)$ la función definida por esta ecuación que, además, verifica que $z(1, 0) = 0$. Obtener las derivadas parciales de z respecto de x y de y.

Comprobamos primero que $f(1, 0, z(1, 0)) = f(1, 0, 0) = 1 + 0 + 0 = 1$. Para calcular las derivadas de $z(x, y)$, hacemos como antes

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ de donde } 2x + y + \operatorname{sen} z + x \cos z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + y + \operatorname{sen} z}{x \cos z} = -\frac{2x + y + \frac{1-x^2-yx}{x}}{x\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2-yx}{x}\right)}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0, \text{ de donde } x+x\cos z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \text{ y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\cos z}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2-yx}{x}\right)}}.$$

EJERCICIO: Dada la ecuación $x^3+y^2x+xz^2=3$, sea $z=z(x,y)$ la función que verifica la ecuación anterior y $z(1,1)=1$. Obtener las derivadas parciales de z respecto de x y de y.

5.7 Normal y tangente a curvas y superficies de nivel y a curvas de $\mathbb{R}^3$ definidas de forma implícita

Una **superficie de $\mathbb{R}^3$ definida en forma implícita** es el conjunto S de puntos solución de una ecuación de la forma $f(x,y,z)=c$. En muchos casos esta ecuación define, de modo implícito, una de las coordenadas (x, y o z) en función de las otras dos. Como la gráfica de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ la vemos como una superficie, la definición anterior de superficie es razonable.

Proposición 5.3 El gradiente como vector normal *El* $\operatorname{grad} f$ *es, en cada punto, un vector normal a la superficie* $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; f(x,y,z)=c\}$ *(lo que quiere decir que* $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ *es ortogonal a todas las curvas contenidas en* S *que pasan por* (x,y,z)*).*

En efecto Sea $c: I\equiv]a,b[\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una curva contenida en S (es decir, tal que $c(I)\subset S$), entonces $c(t)\equiv(x(t),y(t),z(t))\in S$ para todo $t\in I$, luego $f(x(t),y(t),z(t))=c$, y, derivando aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0, \text{ es decir,}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=0, \text{ es decir,}$$
$$\operatorname{grad} f.c'(t)=0,$$

como queríamos demostrar.

De modo análogo se define una **curva de $\mathbb{R}^3$ en forma implícita** como el conjunto C de puntos solución de dos ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{ll} f(x,y,z) & =c \\ g(x,y,z) & =d \end{array}\right\},$$

donde c y d son constantes y f y g son funciones derivables. Como se tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, en muchos casos esas ecuaciones definirán dos coordenadas en función de la tercera, y C se puede dar como la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, cuya gráfica define una curva en el sentido que ya conocemos (por ejemplo, si las ecuaciones definen $z=z(x)$ y $y=y(x)$, entonces C es el conjunto imagen de la curve $\gamma(x)=(x,y(x),z(x))$, luego es natural la definición que hemos dado como curva definida de modo implícito.

Obsérvese que, con la definición que hemos dado, la curva C aparece como la intersección de las superficies $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = c\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; g(x,y,z) = d\}$. Como $\operatorname{grad} f$ es ortogonal a S_1 y $\operatorname{grad} g$ es ortogonal s S_2, y C está contenida en ambas superficies, se tiene que $\operatorname{grad} f$ y $\operatorname{grad} g$ son ortogonales a C, y, si son linealmente independientes, generan, en cada punto de C, el espacio vectorial ortogonal a la recta tangente a C, luego el vector $X = \lambda, \mu, \nu)$ (definido salvo el producto por un escalar) tangente a C es aquél que es simultáneamente ortogonal a $\operatorname{grad} f$ y a $\operatorname{grad} g$, que se puede calcular de dos modos:

a) resolviendo las ecuaciones $\left.\begin{array}{ll} X.\operatorname{grad} f & = 0 \\ X.\operatorname{grad} g & = 0 \end{array}\right\}$, i.e. $\left.\begin{array}{ll} \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial f}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial f}{\partial z} & = 0 \\ \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial g}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial g}{\partial z} & = 0 \end{array}\right\}$

b) o calculando el producto vectorial $X = \operatorname{grad} f \wedge \operatorname{grad} g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}$.

Un caso más sencillo es el de una **curva de $\mathbb{R}^2$ definida de forma implícita**, que es es el conjunto C de puntos solución de una ecuación de la forma $f(x,y) = c$, donde c es una constante y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable. Es decir $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = c\}$ Por los mismos argumentos que en los casos anteriores, resulta que $\operatorname{grad} f = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y})$ es normal (ortogonal) a la curva C y que todo vector tangente a la curva es un múltiplo de $(-\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial x})$, que es, como es inmediato comprobar, ortogonal a $\operatorname{grad} f$.

Veamos algunos ejemplos:

- Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en el punto $(1,1,1)$.

Calculamos primero el vector normal

$$\operatorname{grad} f = (2x, 2y, -2z) = |\text{ en el punto } (1,1,1)| = 2(1,1,-1),$$

y la ecuación del plano tangente será la ecuación del plano que pasa por $(1,1,1)$ y es ortogonal a $(1,1,-1)$, que es, calculando como lo hacíamos en el tema de Geometría Analítica,

$$x + y - z = 1.$$

- Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $\left.\begin{array}{ll} x^2 + y^2 - z^2 & = 1 \\ x^2 + y^2 & = 2 \end{array}\right\}$ en el punto $(1,1,1)$.

Calculamos primero los vectores normales

$$\operatorname{grad} f = (2x, 2y, -2z) = |\text{ en el punto } (1,1,1)| = 2(1,1,-1), \text{ y}$$

$$\operatorname{grad} g = (2x, 2y, 0) = |\text{ en el punto } (1,1,1)| = 2(1,1,0),$$

y la ecuación de la recta tangente será la ecuación de la recta que pasa por $(1,1,1)$ y es ortogonal a $1,1,-1)$ y $(1,1,0)$, que, calculando como lo hacíamos en el tema de Geometría Analítica, es la que viene dada por las ecuaciones en implícitas

$$\left.\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ x+y &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

Usando el producto vectorial

$$\operatorname{grad} f \wedge \operatorname{grad} g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,0),$$

la ecuación de la recta tangente en paramétricas es

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,-1,0).$$

Ejercicios

1. Calcular la derivada de la función $y(x)$ que verifica la ecuación $\operatorname{sen}(y^5)+\ln(xy)+x^2 = 3$

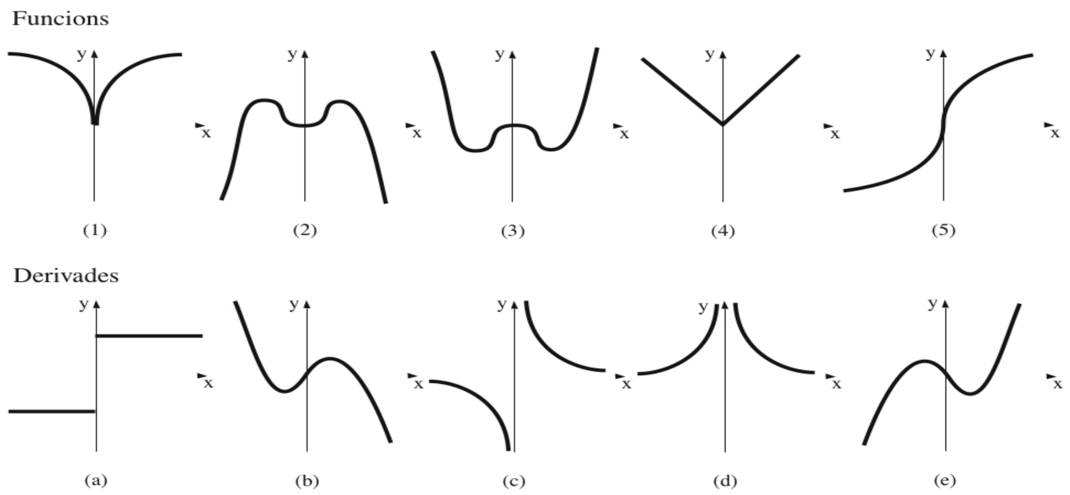
2. Calcular la derivada de la función $y(x)$ que verifica la ecuación $(\operatorname{sen} y)^5+\ln(x)y+x^2-y = 0$

3. Considera la parábola $y = x^2$. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto (2,4).

   Calcula ahora, en general, la ecuación de la recta normal en un punto cualquiera P de la parábola.

   Encuentra el punto intersección Q de la recta normal anterior con la misma parábola.

4. En los dibujos a continuación, la segunda hilera son las gráficas de las derivadas de las funciones representadas en la primera hilera. Di que gráficas se corresponden como la de una función y la de su derivada y razona la respuesta.



5. Resuelve, por el método de Newton, las ecuaciones

$$a)\ \tan x = x, \qquad b)\ x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0, \qquad c)\ x\cos x = 1.$$

6. Calcula, aproximadamente, las raíces de las siguientes ecuaciones

$$a)\ x - \tan x = 0, \qquad b)\ \sin x = 3x + 1.$$

7. Resuelve, por el método de Newton, la ecuación $x - \sin x = 2$.

8. Determina una raíz de la ecuación $(5 - x)e^x = 5$ que esté entre 4.8 y 5.

9. Encuentra una raíz aproximada de la ecuación $x^7 - 2 = 0$.

10. Calcula las primeras y segundas derivadas parciales de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y, z) = 5x^3y + \cos x - xz^2$. b) $g(x, y, z) = xyz$.

    c) $h(x, y, z) = \mathrm{tg}(x^2y^2z^2)$. d) $j(x, y, z) = xy^2 - yz^2$.

    e) $k(x, y, z) = x^2e^{\frac{y}{z}}$. f) $l(x, y, z) = F(x, y)G(y, z)$.

11. La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ se corta por el plano $x = 6$. Encuentra el ángulo aguo entre la recta tangente a la curva intersección y el plano XY en el punto $(6, 2, 3)$. Representa la figura.

12. La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ se corta por el plano $y = 2$. Encuentra el ángulo agudo entre la recta tangente a la curva intersección y el plano XY en el punto $(4, 2, 1)$. Representa la figura.

13. Determina las ecuaciones de la recta tangente a la curva $z = 3x^2 + y^2, x = 1$ en el punto $(1, 2, 7)$. Representa la curva.

14. En los problemas siguientes, calcula la derivada direccional de la función f, en el punto P_0, y en la dirección u:

    a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $P_0 = (1, 0)$, $u = (1, -1)$,

    b) $f(x, y) = \cos xy$, $P_0 = (2, \frac{\pi}{4})$, $u = (4, -1)$,

    c) $f(x, y) = \frac{x-y^2}{x}$, $P_0 = (1, 1)$, $u = (12, 5)$,

    d) $f(x, y) = x \arctan(\frac{y}{x})$, $P_0 = (1, 1)$, $u = (2, -1)$,

    e) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $P_0 = (3, 4, 12)$, $u = (3, 6, -2)$,

    f) $f(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln(xz)$, $P_0 = (1, 0, \frac{1}{2})$, $u = (1, 2, 2)$.

15. En los problemas siguientes, calcula la dirección de mayor crecimiento de f, en el punto P_0, y calcula también la razón del cambio en esa dirección:
    a) $f(x, y) = x^2 + \cos xy, \qquad P_0 = (1, \frac{\pi}{2})$,
    b) $f(x, y, z) = e^{xy} + z^2, \qquad P_0 = (0, 2, 3)$,
    c) $f(x, y, z) = (x + y - 2)^2 + (3x - y - 6)^2, \qquad P_0 = (1, 1, 0)$.

16. En los problemas siguientes, calcula la dirección de mayor decrecimiento de f, en el punto P_0, y calcula también la razón del cambio en esa dirección:
    a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \qquad P_0 = (-1, 1)$,
    b) $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2, \qquad P_0 = (2, -1, 2)$,
    c) $f(x, y, z) = z \ln(x^2 + y^2), \qquad P_0 = (1, 1, 1)$.

17. Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones
    a) $u = x^3 - 2x^2y + 3$.
    b) $u = \operatorname{arctg}(\frac{xy}{z})$.
    c) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

18. Cuánto cambiará aproximadamente la función
$$f(x, y, z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$
si el punto $P(x, y, z)$ se desplaza desde $P(3, 4, 12)$ una distancia de $\Delta s = 0.1$ unidades en la dirección $u = (3, 6, -2)$?

19. Cuánto cambiará aproximadamente la función
$$f(x, y, z) = e^x \cos yz$$
si el punto $P(x, y, z)$ es desplaza desde el origen una distancia de $\Delta s = 0.1$ unidades en la dirección $u = (2, 1, -2)$?

20. En qué dos direcciones se anula la derivada de $f(x, y) = xy + y^2$ en el punto $P_0 = (2, 5)$?

21. En qué dos direcciones se anula la derivada de $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en el punto $P_0 = (1, 1)$?

22. En los problemas siguientes, determina el plano tangente y la recta normal a la superficie dada en el punto P_0:
    a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad P_0 = (1, 2, 2)$,
    b) $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \qquad P_0 = (3, 5, -4)$,
    c) $(x + y)^2 + z^2 = 25, \qquad P_0 = (1, 2, 4)$.
    d) $z = x^2 + y^2, \qquad P_0 = (3, 4, 25)$,
    e) $y = \sin x, \qquad P_0 = (0, 0, 0)$,
    f) $z = 1 - x - y, \qquad P_0 = (0, 1, 0)$.

23. La derivada de una función $f(x, y, z)$ en un punto P_0 es mayor en la dirección $u = (1, 1, -1)$ y el valor de la derivada es $3\sqrt{3}$. Calcula el vector gradiente de f en P. Calcula la derivada de f en P y en la dirección $(1, 1, 0)$.

24. Calcula la derivada de $f(x, y, z) = xyz$ en la dirección del vector velocidad de la hélice

$$c(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 3t)$$

en el instante $t = \frac{\pi}{3}$.

25. La curva $c(t) = (-t, \sqrt{t}, \ln t)$ corta a la superficie

$$z = \ln(\frac{y + 2x^2 + y^2}{4})$$

en $t = 1$. Calcula el ángulo de la intersección, es decir, el ángulo entre su vector velocidad y el plano tangente a la superficie en el punto de intersección.

Capítulo 6

La derivada II: Optimización

6.1 Puntos críticos para funciones de una variable. Máximos y mínimos absolutos.

Sea I un intervalo como los que describimos en el capítulo I, de extremos a y b, $a < b$, y sea f una función real definida sobre I. Diremos que **un punto $x \in I$ es un máximo de f, y que $f(x)$ es un valor máximo** si $f(x) \geq f(y)$ para todo $y \in I$. Diremos que **un punto $x \in I$ es un mínimo de f, y que $f(x)$ es un valor mínimo** si $f(x) \leq f(y)$ para todo $y \in I$.

Un punto $x \in I$ se dice que es un **punto crítico** de una función f definida sobre I si $f'(x) = 0$, y al correspondiente número $f(x)$ se le llama **valor crítico** de f.

Se verifica que *si $x \in I$ es un máximo o un mínimo para la función f definida y derivable sobre I, entonces x es un punto crítico de f.*

Es fácil entender el por qué de este resultado estudiando la relación del signo de la derivada con el crecimiento o decrecimiento de la función. De la interpretación geométrica se intuye que la pendiente de la curva en un punto es positiva si y sólo si la función es creciente ($x < y \implies f(x) < f(y)$) en las proximidades de ese punto. También se deduce este hecho analíticamente a partir de la definición de derivada: f es creciente en las proximidades de x si para $\Delta x > 0$ suficientemente pequeño $f(x + \Delta x) > f(x)$, de donde $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, y recíprocamente, si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, para Δx suficientemente pequeño debe de ocurrir que $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$. Un argumento análogo se puede escribir para funciones decrecientes, resultando así que *una función derivable f es creciente (resp. decreciente) en x si y solo si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$).* Resulta, por tanto, que los puntos en que la función es derivable y se alcanza un máximo o un mínimo deben de ser puntos críticos, pues, si x no es un punto crítico, entonces, o bien $f'(x) < 0$, y la función es creciente en x, o bien $f'(x) < 0$, y la función es decreciente en x.

Se deduce de la proposición anterior que relacionaba los máximos y mínimos con los puntos críticos que, para encontrar los máximos y mínimos de una función (que no tienen por qué ser únicos, aunque si lo son el valor máximo y el valor mínimo), basta con estudiar los valores de f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, pues son los únicos candidatos a máximos o mínimos. También ayuda en la determinación de los máximos y mínimos el siguiente resultado:

Una función contínua definida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ *tiene al menos un máximo y un mínimo en ese intervalo.*

Vamos a ver como se usa todo esto en algunos ejemplos:

• Encontrar los máximos y mínimos de la función $y(x) = x - 2x^3$ definida en el intervalo formado por los puntos x que verifican $0 \leq x \leq 1$.

Primero, observamos que estamos considerando la función definida sólo sobre el intervalo$[0, 1]$, que es cerrado, y que la función que nos dan es contínua, luego existen el máximo y el mínimo. Los puntos a considerar son: 0, 1 y aquellos x tales que $y'(x) = 0$. Calculemos primero estos puntos:

$$0 = y'(x) = 1 - 6x^2, \text{ de donde } x = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

ya que la otra solución $x = -1/\sqrt{6}$ de la ecuación anterior no se encuentra dentro del intervalo $[0, 1]$. Los valores máximo y mínimo se han de dar, pues, en 0, 1 o $1/\sqrt{6}$. Calculemos y en cada uno de esos puntos:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = -1, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{6}},$$

de donde se deduce que 1 es el mínimo y $\frac{1}{\sqrt{6}}$ es el máximo, -1 es el valor mínimo y $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ ese valor máximo.

• Encontrar los máximos y mínimos de la función $y(x) = x - 2x^3$ definida en el intervalo formado por los puntos x que verifican $0 < x < 1$.

En este caso, el intervalo $]0, 1[$ sobre el que está definida la función no es cerrado, y no podemos asegurar la existencia de máximo y mínimo como antes, pero podemos emplear un truco. Podemos darnos cuenta de que la función sigue estando bien definida y es contínua en el intervalo cerrado $[0, 1]$, resolver el problema como en el caso anterior (ahora es el mismo problema de antes) y luego eliminar las soluciones que no caigan dentro del intervalo en que está definida nuestra función. Así, usando el ejercicio anterior, la respuesta a este es que f no alcanza su valor mínimo (no tiene mínimos), y tiene un máximo en $1/\sqrt{6}$.

• Encontrar los máximos y mínimos de la función $y(x) = 1/x$ definida en el intervalo formado por los puntos x que verifican $0 < x \leq 1$.

En este caso, el intervalo $]0, 1]$ sobre el que está definida la función no es cerrado, y no podemos asegurar la existencia de máximo y mínimos, ni podemos tampoco emplear el truco anterior, ya que la función no está definida en $x = 0$. Vamos con los detalles. Primero calculamos los x que verifican

$$0 = y'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

que no existen, pues $-\frac{1}{x^2} < 0$ para todo x. Además

$$y(1) = 1 < \frac{1}{x} \text{ para } x \in]0, 1[,$$

luego esta función tiene un mínimo en $x = 1$ y no tiene ningún máximo.

En todo lo que hemos considerado hasta ahora estamos suponiendo (aunque no lo hayamos dicho) que la función f de la que queremos estudiar los máximos y mínimos es derivable, pues es una condición que está en la proposición que hemos usado que dice que los máximos y mínimos deben de ser puntos críticos. Por lo tanto, si la función no es derivable en algunos puntos del intervalo en que está definida la función, estos puntos son candidatos también a ser máximos o mínimos. Veamos un ejemplo:

• Encontrar los máximos y mínimos de la función $y(x) = x^{\frac{2}{3}}$ definida en $\mathbb{R}$.

La función está definida y es contínua sobre todo $\mathbb{R}$, pero como $\mathbb{R}$ no es un intervalo cerrado, de momento no sabemos si $y(x)$ tiene máximos o mínimos. Los candidatos a tales puntos son (puesto que en los extremos $\pm\infty$ del intervalo la función no está definida) los puntos críticos y los puntos en que no es derivable. Para encontrarlos, calculemos

$$y'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},$$

que no se anula nunca (luego $y(x)$ no tiene puntos críticos) y que está definida en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x = 0$ (en el que y' se hace ∞), luego $x = 0$ es el único punto en el que $y(x)$ no es derivable y, por lo tanto, el único candidato a ser máximo o mínimo. Para descubrir qué es, vamos a considerar la restricción de $y(x) = x^{\frac{2}{3}}$ al intervalo cerrado $[-a, a]$, sobre el que sigue siendo contínua. Entonces sabemos que, en ese intervalo, esta función tiene un máximo y un mínimo, y los únicos candidatos a serlo son a, $-a$ y 0. Calculando en esos puntos, tenemos

$$y(a) = a^{\frac{2}{3}} = (-a)^{\frac{2}{3}} = y(-a) > 0 = y(0),$$

luego, para cada $a > 0$, 0 es un mínimo de $y(x)$ sobre el intervalo $[-a, a]$, luego, como para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un $a > 0$ tal que $x \in [-a, a]$, se tiene que $y(0) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego 0 es un mínimo (el único además) para la función $x^{\frac{2}{3}}$ definida sobre $\mathbb{R}$.

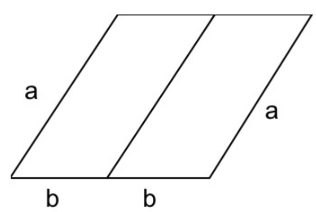
• Encontrar los máximos y mínimos de la función $y(x) = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$ definida sobre $\mathbb{R}$. Se resuelve como el ejemplo anterior.

Ejercicios

:

1) Encontrar los máximos y mínimos de la función $y(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x - 2}$ definida en todos los puntos en los que tiene sentido la expresión.

2) Encontrar el paralelogramo de área máxima cuyo perímetro es 36.



3) Encontrar la región formada por dos paralelogramos pegados como los de la figura que encierran un área máxima y tales que su perímetro (contando el lado interior) es 36.

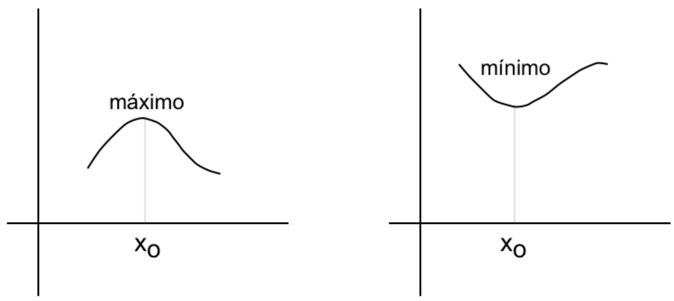
6.2 Máximos y mínimos relativos. Concavidad y convexidad. Dibujo de gráficas.

Dada una función f definida sobre un intervalo I, un punto $x_0 \in I$ **es un máximo relativo** de f si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier x que verifique $|x - x_0| < \varepsilon$ (es decir, $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$) se tiene que $f(x) \leq f(x_0)$. Se dice que x_0 **es un mínimo relativo** de f si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier x que verifique $|x - x_0| < \varepsilon$ (es decir, $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$) se tiene que $f(x) \geq f(x_0$.

Obsérvese que un máximo (absoluto) es un máximo relativo y que un mínimo (absoluto) es un mínimo relativo.

Dado un intervalo I, un punto $x \in I$ se dice que es un **punto interior de** I si no es ninguno de los extremos del intervalo.

En un punto interior, el aspecto de un máximo y de un mínimo relativo respecto de los puntos próximos es el que se indica en las siguientes figuras:



Para encontrar los máximos y mínimos relativos se usa con frecuencia el siguiente

Teorema 6.1 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que admite derivada contínua en todo punto de I.*

(a) *Si x_0 es un punto interior de I y es un máximo o un mínimo relativo, entonces es un punto crítico de f, es decir, $f'(x_0) = 0$.*

(b) *Si f admite segunda derivada $f''(x_0)$ en x_0, $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo relativo de f.*

(c) *Si f admite segunda derivada $f''(x_0)$ en x_0, $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo relativo de f.*

Idea de la demostración La damos en las dos figuras siguientes

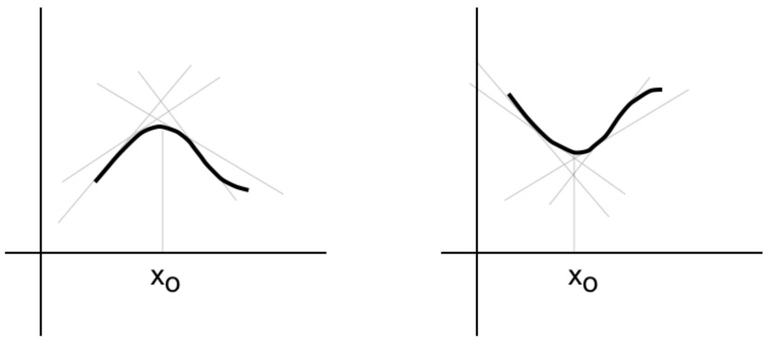


Fig1: A la izquierda de un máximo x_0, la función es creciente (o al menos no decreciente), por lo que la pendiente de la recta tangente $f'(x)$ es positiva (o al menos no negativa). A la derecha de ese mismo máximo x_0, la función es decreciente (o al menos no creciente), por lo que la pendiente de la recta tangente $f'(x)$ es negativa (o al menos no positiva), luego, en x_0, donde f' pasa de positiva a negativa, ha de ser $f'(x_0) = 0$. Se observa, además, que la pendiente de las rectas tangentes va decreciendo (o, al menos no crece) constantemente.

Si suponemos $f'(x_0) = 0$: f'' es la derivada de f', si $f''(x_0) < 0$, sigue verificándose que $f''(x) < 0$ para puntos x próximos a x_0, lo que indica que, cerca de x_0, f' es decreciente y, como es 0 en x_0, es positiva a la izquierda de x_0 y negativa a la derecha de x_0, luego f es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a la derecha de x_0, luego x_0 es un máximo relativo de f.

Fig. 2: A la izquierda de un mínimo x_0, la función es decreciente (o al menos no creciente), por lo que la pendiente de la recta tangente $f'(x)$ es negativa (o al menos no positiva). A la derecha de ese mismo máximo x_0, la función es creciente (o al menos no decreciente), por lo que la pendiente de la recta tangente $f'(x)$ es positiva (o al menos no negativa), luego, en x_0, donde f' pasa de negativa a positiva, ha de ser $f'(x_0) = 0$. Se observa, además, que la pendiente de las rectas tangentes va creciendo (o, al menos no decrece) constantemente.

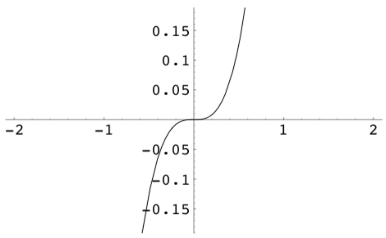
Si suponemos $f'(x0) = 0$: f'' es la derivada de f', si $f''(x_0) > 0$, sigue verificándose que $f''(x) > 0$ para puntos x próximos a x_0, lo que indica que, cerca de x_0, f' es creciente y, como es 0 en x_0, es negativa a la izquierda de x_0 y positiva a la derecha de x_0, luego f es decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a la derecha de x_0, luego x_0 es un mínimo relativo de f.

No son ciertos los recíprocos de ninguno de los apartados del teorema anterior. Así,

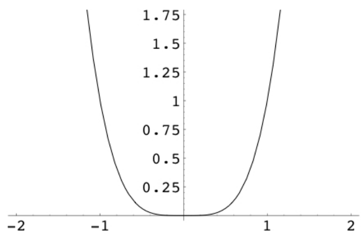
i) Contraejemplo al apartado a) La función $y = x^3$ verifica $y'(0) = 0$ y, sin embargo, 0 no es un máximo ni un mínimo relativo, puesto que, para cualquier $a > 0$, se tiene $y(-a) = -a^3 < 0 = y(0) < a^3 = y(a)$.

ii) Contraejemplo al apartado b) La función $y = x^4$ tiene un mínimo (absoluto) en $x = 0$, puesto que, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $y(a) = a^4 \leq 0 = y(0)$, por lo tanto, también es un mínimo relativo, y, sin embargo, $y''(0) = 0$.

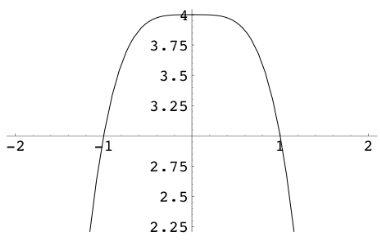
iii) Contraejemplo al apartado c) La función $y = 4 - x^4$ tiene un máximo (absoluto) en $x = 0$, puesto que, para cualquier $a \in Bbb$, $y(a) = 4 - a^4 \leq 0 \leq 4 = y(0)$, por lo tanto, también es un máximo relativo, y, sin embargo, $y''(0) = 0$.



$y = x^3$



$y = x^4$

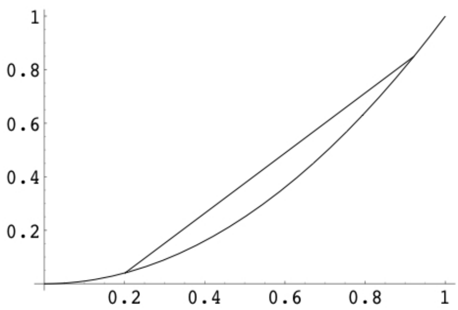


$y = 4 - x^4$

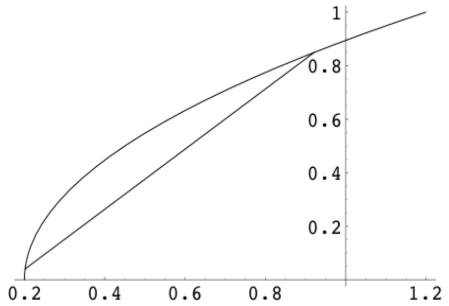
Además de para detectar máximos y mínimos, la segunda derivada también sirve para detectar si la función es de una forma especial: cóncava o convexa. Describamos primero lo que significan estos nombres:

Una función rectilínea (cuya gráfica es una recta) tiene pendiente constante y, por lo tanto segunda derivada 0.

Llamaremos función convexa a una función que verifique que, cuando uno dos puntos de su gráfica por un segmento de recta, el segmento de curva de la gráfica correspondiente queda por debajo del segmento de recta. Una función verifica esta propiedad si y sólo si crece siempre más deprisa que su recta tangente (ver dibujo a la derecha), luego **una función es convexa** si y solo si su derivada es creciente, es decir, si y solo si $f''(x) > 0$ para todo x.



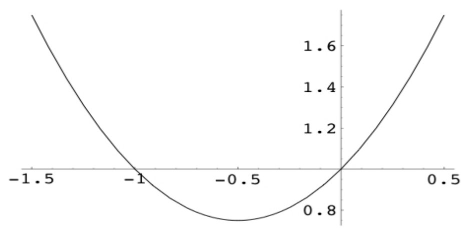
Llamaremos función cóncava a una función que verifique que, cuando uno dos puntos de su gráfica por un segmento de recta, el segmento de curva de la gráfica correspondiente queda por encima del segmento de recta. Una función verifica esta propiedad si y sólo si decrece siempre más deprisa que su recta tangente (ver dibujo a la derecha), luego **una función es cóncava** si y solo si su derivada es decreciente, es decir, si y solo si $f'' < 0$ para todo x.



Con el estudio de los máximos y mínimos relativos y la concavidad-convexidad se puede hacer uno una idea aproximada de como es la gráfica de una función, pudiendo entender así el por que de la forma que esta tiene cuando se dibuja usando una calculadora gráfica o un ordenador, pudiendo ayudarse también de esto para saber que intervalo he de poner en el ordenador al dibujar la gráfica si me quiero hacer una idea global de su forma. Veamos algunos ejemplos.

• Gráfica de la función $y = x^2 + x + 1$.

Para averiguar los máximos y mínimos, calculamos la derivada e igualamos a cero: $y' = 2x + 1 = 0$, la solución es $x = -1/2$. Calculamos ahora la segunda derivada y sale $y'' = 2 > 0$, luego la función es convexa y $x = -1/2$ es un mínimo, luego su as-



pecto será como el de la figura adjunta.

• Gráfica de la función $y = x^3 + x^2 + 1$.

Para averiguar los máximos y mínimos, calculamos la derivada e igualamos a cero:

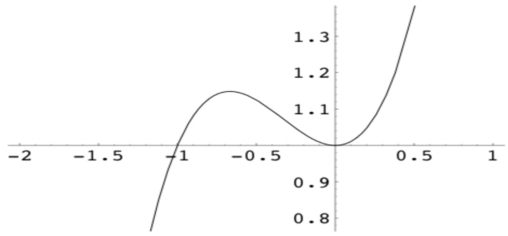
$y' = 3x^2 + 2x = 0$,

las soluciones son $x = -2/3$, $x = 0$. Calculamos ahora la segunda derivada y sale

$$y'' = 6x + 2 = \begin{cases} < 0 & \text{en} \quad x < -1/3 \\ = 0 & \text{en} \quad x = -1/3 \\ > 0 & \text{en} \quad x > -1/3 \end{cases},$$

luego $x = 0$ es un mínimo, $x = -2/3$ es un máximo,

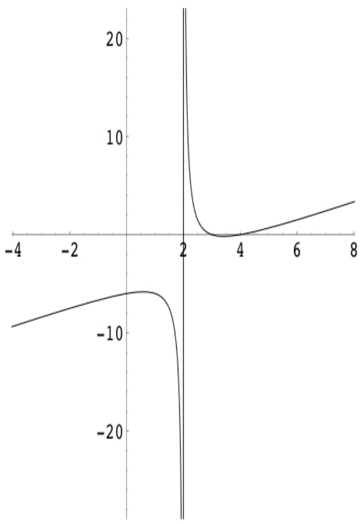
la función es cóncava en $x < -1/3$ y convexa en $x > -1/3$, luego su aspecto será como el de la figura adjunta.



• Gráfica de la función $y = (x^2 - 7x + 12)/(x - 2)$. Primero observamos que esta función no está definida en $x = 2$ (punto en el que se anula el denominador). Para averiguar los máximos y mínimos, calculamos la derivada e igualamos a cero: $y' = (x^2 - 4x + 2)/(x - 2)^2 = 0$, las soluciones son $x = 2 + \sqrt{2}$, $x = 2 - \sqrt{2}$. Calculamos ahora la segunda derivada y sale

$$y'' = \frac{4}{(-2 + x)^3} = \begin{cases} < 0 & \text{en} \quad x < 2 \\ > 0 & \text{en} \quad x > 2 \end{cases},$$

luego $x = 2 + \sqrt{2}$ es un mínimo, $x = 2 - \sqrt{2}$ es un máximo, la función es cóncava en $x < 2$ y convexa en $x > 2$, luego su aspecto será como el de la figura adjunta.



Ejercicio:

Dibuja el aspecto de la gráfica de la función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}.$$

6.3 Teoremas de Rolle y del valor medio. Regla de L'Hôpital.

En algunos casos, la derivada es también útil para el cálculo de límites de cocientes de funciones, especialmente cuando numerador y denominador tienden simultáneamente a 0. Ello es gracias a la siguiente:

Teorema 6.2 (**Regla de L'Hôpital**) *Si f y g son funciones derivables, definidas sobre un intervalo I, x_0 es un punto interior de I, y se cumplen a)* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, *b)$g'(x) \neq 0$ para x en un intervalo abierto que contiene a x_0, y*

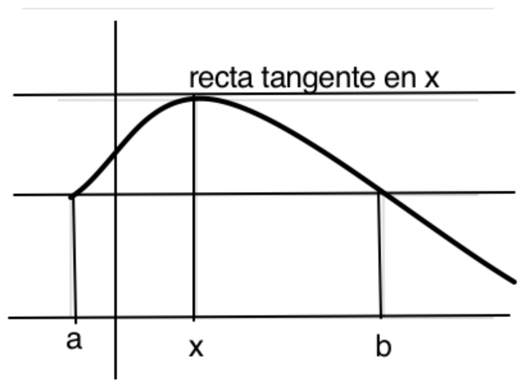
c) existe $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ *(que puede ser también* $+\infty$ *o* $-\infty$*),*
entonces se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La demostración de esta regla puede hacerse usando el desarrollo de Taylor que veremos en la sección siguiente, pero es más corriente demostrar esta regla usando el teorema del valor medio, que, a su vez, se puede demostrar usando el teorema de Rolle. Enunciamos estos dos teoremas a continuación.

Teorema 6.3 (**Teorema de Rolle**) *Si* f *es una función contínua en un intervalo cerrado* $[a,b]$ *y derivable en el correspondiente intervalo abierto* $]a,b[$ *tal que* $f(a)=f(b)$*, entonces existe (al menos) un punto* $x \in]a,b[$ *tal que* $f'(x)=0$*.*

Idea de la demostración Si $f'(x)$ no se anulara nunca, f sería creciente o decreciente en todo el intervalo $]a,b[$ y, por lo tanto, no podría tomar en b el mismo valor que en a. La siguiente gráfica muestra también lo intuitivo de este teorema:

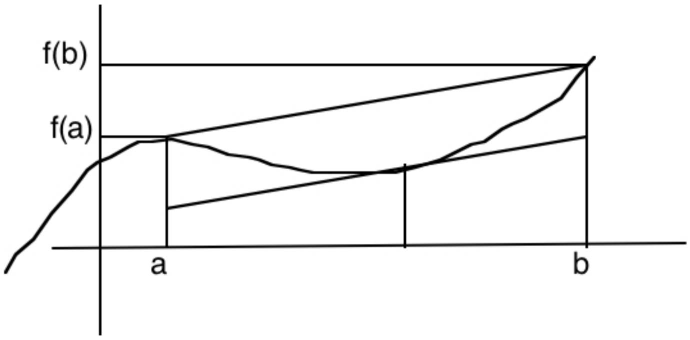


Teorema 6.4 (**Teorema del valor medio**) *Si* f *es una función contínua en un intervalo cerrado* $[a,b]$ *y derivable en el correspondiente intervalo abierto* $]a,b[$*, entonces existe un punto* $x \in]a,b[$ *tal que* $f(b)-f(a)=f'(x)\ (b-a)$*.*

Idea de la demostración Basta aplicar el teorema de Rolle a la función

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

De nuevo es posible considerar natural este teorema observando la siguiente gráfica



Un ejemplo de aplicación, y también de no aplicabilidad, de la regla de L'Hôpital es el siguiente: supongamos que queremos calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{px^{p-1}}.$$

Para $p > 1$ y par se cumplen todas las hipótesis de la regla, y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{p\ x^{p-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{p(p-1)x^{p-2}} = \begin{cases} = \frac{1}{2} & \text{si} \quad p = 2 \\ = \infty & \text{si} \quad p > 2 \text{ y par} \\ \text{no converge} & \text{si} \quad p > 2 \text{ e impar} \end{cases},$$

pero si $p = 1$ no se cumple la condición b), y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1-1}} \neq \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{0},$$

pues el límite de la izquierda da 0 y el de la derecha no está definido.

Si queremos calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^p},$$

distinguimos nuevamente:

para $p = 1$ se cumplen todas las hipótesis de la regla de L'Hôpital, y se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = 0,$$

para $p > 1$ el cociente de derivadas es justamente el del ejercicio anterior, que no se puede saber a priori si cumple la condición c) o no, pero se averigua si la cumple o no volviendo a aplicar L'Hôpital, como hicimos antes.

La regla de L'Hôpital también es cierta cuando la condición a) se cambia por $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Así, por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2x^2}{3x^2+5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-4x}{6x+5} = -\frac{2}{3}.$$

6.4 Desarrollo en serie de Taylor.

El desarrollo de Taylor permite aproximar una función derivable por un polinomio, con una aproximación mayor cuanto mayor se el grado del polinomio. La propiedad que permite esta aproximación es la siguiente:

Sea f una función derivable hasta el orden $n+1$ en un intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Para todo x en ese intervalo se verifica que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + ...$$
$$... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}, \quad (6.1)$$

donde $c \in [a, x]$ si $a < x$ y $c \in [x, a]$ si $x < a$.

La fórmula (6.1) se llama fórmula de Taylor, el polinomio

$$P_n(f, a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

se llama **polinomio de Taylor de orden** n **o desarrollo de Taylor** hasta el orden n de la función f en a o alrededor de a. El último sumando

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}$$

mide el error que se comete cuando se aproxima la función $f(x)$ por $P_n(f, a)(x)$.

Obsérvese que, para todo número natural $p \leq n$, como c está entre a y x,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(f, a)(x)}{(x-a)^p} = \lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^p} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^p} = 0,$$

por lo que se dice que R_n es un término de orden superior a n. Un término de orden superior a n (en a), o infinitésimo de orden n en a, es una función $O(n)$ que verifica

$$\lim_{x \to a} \frac{O(n)(x)}{(x-a)^p} = 0 \text{ para todo } p \leq n,$$

por eso se escribe el desarrollo de Taylor a menudo en la forma

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + O(n).$$

Veamos algunos ejemplos:

Desarrollo de Taylor de e^x alrededor de $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + O(n),$$

y es de aquí de donde se deduce que

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Una vez que tenemos el desarrollo de Taylor de e^x, nos podemos preguntar: ¿hasta qué orden del desarrollo de Taylor hemos de tomar para calcular e^x con un error menor que $0'01$ cuando $x \in [0, 0'1]$?. Para responderla usaremos (6.1), que nos dice que el error que se comete al tomar el desarrollo hasta el orden n viene dado por R_n. La pregunta anterior se traduce, por lo tanto, en: ¿cual es el valor mínimo de n para que $|R_n(x)| < 0'01$ cuando $x \in [0, 0'1]$?. Para $f(x) = e^x$,

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}e^c|x^{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!}e^{0'1}(0'1)^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}2(0'1)^{n+1}$$

que es $= 0'01$ si $n = 1$, luego basta con tomar $n = 1$, es decir, en el intervalo $[0, 0'1]$, $e^x \sim 1+x$ con un error menor de una centésima.

Desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen} x$ en $x = 0$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + ... + (-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} + O(2m-1).$$

¿Hasta qué orden $2m-1$ del desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen} x$ hemos de tomar para calcular $\operatorname{sen} x$ con un error menor que $0'01$ cuando $x \in [-1, 1]$?. Argumentando como antes, buscamos un m que verifique

$$|R_{2m-1}(x)| = \frac{1}{(2m)!}|\operatorname{sen} c||x^{2m}| \leq \frac{1}{(2m)!},$$

que es menor que $0'01$ cuando $(2m)! > 100$, lo que ocurre a partir de $2m \geq 5$, es decir, para $2m - 1 \geq 4$, es decir, para el desarrollo de Taylor de orden $2m - 1 = 5$.

Ejercicios

1. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x \cos x}$.

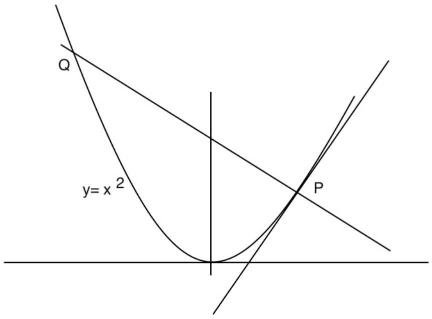
2. Enuncia el resultado que se puede aplicar para calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x^2}$, y calcúlalo.

3. Un plano MN separa un medio en el cual la velocidad de propagación de la luz es v_2 de otro medio en el cual la velocidad es v_1. ¿Cuál será la ley de propagación para que un rayo de luz vaya del punto A al punto B en el intervalo de tiempo más corto posible?

4. La intensidad de iluminación de un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto al foco luminoso. Dos luces, la primera de ellas con 8 veces más intensidad que la otra, están separadas por 6 metros. ¿A qué distancia de la luz de mayor intensidad, y para un punto situado entre las dos luces, es la iluminación total mínima?

5. Considera la parábola $y = x^2$. (a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto (2,4). (b) Calcula ahora, en general, la ecuación de la recta normal en un punto cualquiera P de la parábola. (c) Encuentra el punto intersección Q de la

recta normal anterior con la misma parábola. (d) Demuestra que la distancia de P a Q se minimiza cuando $P = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.



6. Calcula la mínima cantidad M de material para poder construir un cilindro circular recto y vacío, abierto por la parte superior, para que pueda contener un volumen V y tal que el grosor de las paredes sea a.

7. Un día, al salir de casa, cuando ya te encuentras a 10 Km, te das cuenta de que te has dejado un grifo abierto y decides dar media vuelta. El agua que sale del grifo cuesta 10 ptas. por hora. Ir en tu coche a una velocidad de s kilómetros por hora cuesta $6 + \frac{s}{10}$ ptas. por kilómetro.

   La pregunta es: ¿a qué velocidad deberías de ir para minimizar la suma del coste del agua y del viaje en tu coche?

8. Un fabricante de gafas de sol puede fabricar 50.000 unidades con un precio de venta de 16 euros por unidad y con un coste fijo de 9000 euros más 11 euros y medio por unidad producida.

   a) Explica por qué la entrada total de dinero, E, el coste total, C, i el beneficio, B, han de satisfacer las ecuaciones

   $$E = 16x, \qquad C = 9000 + (11.5)x, \qquad B = E - C = (4.5)x - 9000.$$

   b) El punto de ruptura entre pérdidas y beneficios es el nivel de producción x para el cual el beneficio es cero. Determínalo

   c) Determina el nivel de producción x para el cual el beneficio es de 4500 euros.

   d) Si se producen más de 50.000 unidades, la entrada total es

   $$E = 16x - \frac{4}{9}\frac{x^2}{10^6},$$

   mientras que el coste no cambia. Encuentra el nivel de producción x que maximiza el beneficio.

9. Dibuja esquemáticamente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y enuncia todos los resultados teóricos que utilices relacionados con las derivadas de la función.

10. Dibuja la gráfica de la función
$$y = x^8 - x^4,$$
estudiando sus máximos y mínimos relativos, crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, ...

11. Dibuja la gráfica de la función
$$y = \ln x + x^2 - 3x,$$
estudiando sus máximos y mínimos relativos, crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, ...

12. Escribe el desarrollo de Taylor alrededor de $x = 0$, hasta el término de orden 4, de la función $y = \sqrt{x+2}$.

13. Escribe el desarrollo de Taylor alrededor de $x = 2$, hasta el término de orden 4, de la función $y = e^{x-2}$.

14. Escribe el desarrollo de Taylor alrededor de $x = 2/3$, hasta el término de orden 4, de la función $y = \cos 3x - 2$.

15. Escribe el desarrollo de Taylor alrededor de $x = \pi/2$, hasta el término de orden 4, de la función $y = \ln(\mathrm{sen}(x))$.

6.5 Derivadas sucesivas. Máximos y mínimos relativos para funciones de varias variables.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, si es derivable podemos considerar sus derivadas parciales en cada punto, definiéndose nuevas funciones
$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$
que, si son derivables de nuevo, permiten calcular también sus derivadas parciales, dando lugar a lo que llamaremos segunda derivada parcial
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$
y, en general, la derivada parcial k-ésima se define así:
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial i_1}\left(\frac{\partial}{\partial i_2} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right) \cdots\right).$$
Estas derivadas parciales sucesivas verifican la siguiente regla fundamental:

Teorema 6.5 *(***Regla de las derivadas cruzadas***) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ también son derivables, entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \textit{para todo} \quad i, j = 1, ..., n$$

Como consecuencia de esta regla, no hay que preocuparse del orden en que se calculan las derivadas parciales, el resultado final es el mismo independientemente del orden. Así, por ejemplo, si $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(xy)$,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \cos(xy) - yx \operatorname{sen}(xy).$$

Vamos a estudiar ahora los máximos y mínimos relativos de una función de varias variables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

La función f tiene **un máximo (resp. mínimo) relativo** en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ si existe un $r > 0$ tal que el conjunto U de $\mathbb{R}^n$ de los puntos a distancia de p menor que r verifique $f(p) \geq f(x)$ (resp. $f(p) \leq f(x)$) para todo $x \in U$. Se dice también que p es un punto máximo o mínimo relativo de f.

Para descubrir criterios que nos permitan decidir si f tiene un máximo o mínimo local en p, vamos a usar lo que sabemos de funciones de una variable. Para cada vector $v \in \mathbb{R}^n$, consideremos una curva $c(t)$ $p + tv$ que pasa por p (i.e. $c(0) = p$) y es tangente a v en p (i.e. $c'(0) = v$) (por ejemplo $c(t) = p + tv$), y consideremos la restricción $f(c(t))$ de f a esa curva. Si f tiene un máximo o mínimo relativo en p, entonces $f \circ c$ tiene un máximo o mínimo relativo en 0, por lo tanto $(f \circ c)'(0) = 0$, y, usando la expresión matricial de df_p y la regla de la cadena, si $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, entonces

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt}(0) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}(0) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = 0,$$

y, como esta igualdad se ha detener para todo v de $\mathbb{R}^n$, tenemos que

Teorema 6.6 *Si f tiene un máximo o un mínimo en p, entonces $df_p = 0$ (o, equivalentemente,* $\operatorname{grad} f(p) = 0$*), es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.*

Es decir, la primera condición que ha de cumplir f para tener un máximo o mínimo en p es que $df_p = 0$. Se dice que p **es un punto crítico de f si $df_p = 0$**. Suponiendo que p es un punto crítico de f, vamos a continuar el estudio con las segundas derivadas. Sabemos que si $(f \circ c)''(0) < 0$ (resp. $(f \circ c)''(0) > 0$) entonces $f \circ c$ tiene un máximo (resp. un mínimo) en 0. Luego, si esto ocurre para toda curva $c(t)$ que pasa por p[1], entonces p es un máximo (resp. un mínimo) relativo de f.

[1]basta con que ocurra para toda recta que pase por p

Hagamos el cálculo de $(f \circ c)''(0)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2(f\circ c)}{dt^2}(0) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d(f\circ c)}{dt}(t)\right)(0) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t))\frac{dx_i}{dt}(t)\right)(0)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t))\right)(0)\frac{dx_i}{dt}(0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\frac{d^2x_i}{dt^2}(0)\\
= |\text{ como } df_p = 0| &= \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}c(t)\right)(0)\frac{dx_i}{dt}(0) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(p)\frac{dx_j}{dt}(0)\frac{dx_i}{dt}(0), \quad (6.2)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la regla de la cadena en la última igualdad.

Llamaremos Hessiano de f, y lo denotaremos por $\operatorname{Hess} f$ a la matriz

$$
\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}
\end{pmatrix}.
$$

De la regla de las derivadas cruzadas se deduce que $\operatorname{Hess} f$ es una matriz simétrica. Definiremos su acción sobre dos vectores $v = (v_1, ..., v_n)$ y $w = (w_1, ..., w_n)$ por

$$
\operatorname{Hess} f(v,w) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}.
$$

Se deduce de esta definición y de la simetría de $\operatorname{Hess} f$ que $\operatorname{Hess} f(v,w) = \operatorname{Hess} f(w,v)$ y que es bilineal, i.e., $\operatorname{Hess} f(\lambda v + \mu w, u) = \lambda \operatorname{Hess} f(v,u) + \mu \operatorname{Hess} f(w,u)$ y $\operatorname{Hess} f(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \operatorname{Hess} f(u,v) + \mu \operatorname{Hess} f(u,w)$.

Con esta notación, resulta de (6.2) que:

- si $\operatorname{Hess} f(v,v) < 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, entonces

$$\frac{d^2(f\circ c)}{dt^2}(0)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(p)\frac{dx_j}{dt}(0)\frac{dx_i}{dt}(0)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}(0) & \frac{dx_2}{dt}(0) & \dots & \frac{dx_n}{dt}(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}(0)\\ \frac{dx_2}{dt}(0)\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}(0)\end{pmatrix}<0,$$

  para toda curva c que pasa por p, luego, para toda c que pasa por p, $f\circ c$ tiene un máximo relativo en 0 , luego f tiene un máximo relativo en p,

- si $\operatorname{Hess} f(v,v) > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en p, como se ve por un razonamiento análogo al anterior,

- si $\operatorname{Hess} f(v,v) > 0$ para algún $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, y $\operatorname{Hess} f(w,w) < 0$ para algún $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, entonces $f\circ c$ tiene un mínimo en 0 para algunas curvas c y un máximo para otras, por lo tanto $f(p)$ no es ni un máximo ni un mínimo relativo, y p se llama un **punto silla** (recordemos que estamos bajo la hipótesis general de que $df_p = 0$, i.e., de que p es un punto crítico de f).

Veamos un ejemplo. Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Su diferencial es $df = \begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\end{pmatrix})$, que es 0 solo en el punto $(0,0,0)$, luego este es el único punto en el que f puede tener un máximo o mínimo relativo. Veamos si lo es calculando el Hessiano. Calculando todas las segundas derivadas parciales, se obtiene

$$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \operatorname{Hess} f(v,v) = \begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$
$$= 2(v_1^2+v_2^2+v_3^2) = 2|v|^2 > 0 \text{ si } v \neq 0,$$

luego $f(p)$ es un mínimo relativo.

No siempre es fácil, como en el ejemplo anterior, calcular directamente el signo de $\operatorname{Hess} f(v,v)$ para todo v. Vamos a ver que esto puede averiguarse indirectamente mediante el cálculo de determinantes. Vamos a dar una idea (es decir, una demostración solo parcial, que se limita a explicar la idea que hay debajo, sin pretender el rigor) de como puede llegarse a ello.

Supongamos que es posible hacer un cambio de sistema de coordenadas de modo que $\operatorname{Hess} f$ sea una matriz diagonal[2]

$$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \mu_n & \end{pmatrix},$$

entonces

$$\operatorname{Hess} f(v,v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \dots + \mu_n v_n^2.$$

De donde se deduce que:

- i) si $\mu_i > 0$ para todo i, entonces $f(p)$ es un mínimo relativo,
- ii) si $\mu_i < 0$ para todo i, entonces $f(p)$ es un máximo relativo,
- iii) si existe un $\mu_i < 0$ y un $\mu_j > 0$, entonces existe una curva $c(t)$ pasando por p (una que verifique $c'(0) = (0,...,0,1,0,...,0)$ con el 1 ocupando el lugar i-ésimo) tal que $f \circ c(t)$ tiene un máximo relativo en 0 (porque $(f \circ c)''(0) = \operatorname{Hess} f(c'(0), c'(0)) = \mu_i |c'(0)|^2 < 0$) y existe una curva $\alpha(t)$ pasando por p (una que verifique $\alpha'(0) = (0,...,0,1,0,...,0)$ con el 1 ocupando el lugar j-ésimo) tal que $f \circ c(t)$ tiene un mínimo relativo en 0 (porque $(f \circ \alpha)''(0) = \operatorname{Hess} f(\alpha'(0), \alpha'(0)) = \mu_j |\alpha'(0)|^2 > 0$), por lo tanto p es un punto silla.

Sea $(\operatorname{Hess} f)_k$ la submatriz cuadrada de $\operatorname{Hess} f$ formada por los k primeros elementos de las k primeras filas, entonces se tiene

$$\det(\operatorname{Hess} f)_k = \mu_1 ... \mu_k.$$

Combinando esta expresión con la discusión anterior sobre los signos de los μ_i, resulta:

- i) si $\det(\operatorname{Hess} f)_k > 0$ para todo k, entonces $f(p)$ es un mínimo relativo,
- ii) si $(-1)^k \det(\operatorname{Hess} f)_k > 0$ para todo k, entonces $f(p)$ es un máximo relativo,
- iii) si $\det(\operatorname{Hess} f) \neq 0$ existe un k para el que $\det(\operatorname{Hess} f)_{2k} < 0$, entonces p es un punto silla.

Veamos algunos ejemplos, acompañados de dibujos que ayudarán a entender estos conceptos:

Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$, calculemos primero los puntos críticos buscando los puntos en los que se anulan todas las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0,$$

[2] lo que se puede demostrar que es cierto

que solo es el punto $(0,0)$. El $\operatorname{Hess} f$ en ese punto es

$$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

y, como $\operatorname{Hess} f$ aparece en forma diagonal, podemos aplicar los criterios vistos para los μ_i. Como hay un valor de la diagonal de la matriz positivo y otro negativo, se trata de un punto silla.

Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy$, calculemos primero los puntos críticos buscando los puntos en los que se anulan todas las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x = 0,$$

que solo es el punto $(0,0)$. El $\operatorname{Hess} f$ en ese punto es

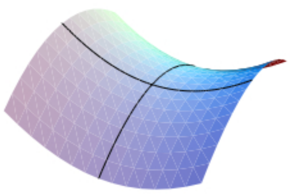
$$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego $\det(\operatorname{Hess} f)_1 = 0$ y $\det(\operatorname{Hess} f)_2 = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, por lo tanto estamos en el caso iii) y se trata de un punto silla.

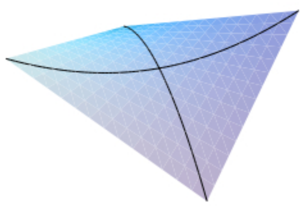
Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, calculemos primero los puntos críticos buscando los puntos en los que se anulan todas las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0,$$

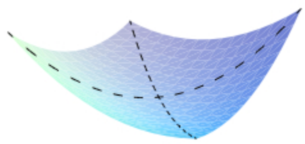
que solo es el punto $(0,0)$. El $\operatorname{Hess} f$ en ese punto es $\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, luego $\det(\operatorname{Hess} f)_1 = 2 > 0$ y $\det(\operatorname{Hess} f)_2 = \det \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, y se trata de un mínimo.



$f(x,y) = x^2 - y^2$



$f(x,y) = xy$



$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

6.6 Desarrollo de Taylor de una función de varias variables

Como en el caso de funciones de una variable real, el desarrollo de Taylor de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ aproxima la función f en las proximidades de un punto $a \in \mathbb{R}^n$ para una función polinómica en las variables $x_i - a_i$, siendo $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. La fórmula del desarrollo de Taylor para este caso es

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) +$$

$$... + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,...,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(a)(x_{i_1} - a_{i_1}) ... (x_{i_k} - a_{i_k}) + O(k),$$

donde $O(k)$ indica términos de orden superior al de un polinomio de grado k en $x_i - a_i$.

6.7 Máximos y mínimos absolutos para funciones de varias variables

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definida sobre un dominio D de $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂D y queremos hallar los máximos (o mínimos) absolutos de esa función, esos máximos pueden darse en los siguientes tipos de puntos:

a) Un punto interior p de D (es decir, un punto que no esté en la frontera de D). Si hay un máximo o mínimo absoluto de f en esos puntos, también será un máximo o mínimo relativo y, por lo tanto, un punto crítico, en el que se debe verificar que $df_p = 0$.

b) Un punto p de la frontera ∂D. En este caso, la frontera puede, a su vez, descomponerse en la unión de los trozos ∂D_s en los que es suave y los trozos ∂D_a en los que tiene aristas o vértices. Si f tiene un máximo (o mínimo) absoluto en ∂D_s, también será un máximo (o mínimo) relativo de la función $\overline{f} = f|_{\partial D_s}$, y deberá verificarse que $d\overline{f}_p = 0$. Si el máximo absoluto está en ∂D_a, se vuelve a dividir en pedazos suaves y no suaves como antes, y se continúa la argumentación hasta llegar a un conjunto que está formado solo por puntos aislados.

De estas consideraciones se deduce que un proceso posible a seguir para encontrar máximos y mínimos absolutos de f puede ser el siguiente.

1. Primero se escribe y resuelve el sistema de ecuaciones $df_p = 0$.

   Si existen soluciones $p_1, ..., p_r$ de ese sistema de ecuaciones, se calcula $f(p_1), ..., f(p_r)$ y se determina el mayor (o menor) valor de los que f toma en esos puntos.

2. Se escribe y resuelve el sistema de ecuaciones $d\overline{f}_p = 0$ sobre ∂D_s, y se calcula el mayor (o menor) valor de f en los puntos solución de ese sistema de ecuaciones.

3. Se continúa el proceso con ∂D_a hasta que no queda ningún punto de ∂D por estudiar.

4. El máximo (o mínimo) valor de f será el mayor de los valores encontrados en los pasos anteriores, y los puntos máximos (o mínimos) los puntos donde la función f alcance esos valores.

Antes de ver un ejemplo concreto, vamos a repetir la explicación de los casos anteriores para el caso $n = 2$ y D un rectángulo. Repetimos la explicación del proceso anterior para este caso:

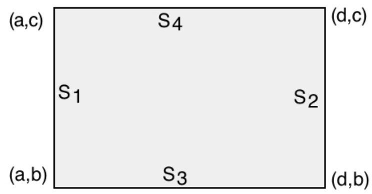
1. Primero se escribe y resuelve el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

   A continuación se calcula el valor de f en esos puntos (si existen y están dentro del interior del rectángulo que consideramos) y se determina el valore máximo (o mínimo) de entre ellos.

2. Si el rectángulo tiene por vértices los puntos (a,b), (a,c), (d,b), (d,c), su frontera suave ∂D_s está formada por los segmentos $S_1 = \{(a,t);\ b < t < c\}$, $S_2 = \{(d,t);\ b < t < c\}$, $S_3 = \{(t,b);\ a < t < d\}$ y $s_4 = \{(t,c);\ a < t < d\}$. Por lo tanto, $\overline{f}$ sobre los puntos de esta frontera es, cuando se restringe a cada uno de estos segmentos S_i,

$$\overline{f}|_{S_1} = f(a,t), \tag{6.3}$$
$$\overline{f}|_{S_2} = f(d,t), \tag{6.4}$$
$$\overline{f}|_{S_1} = f(t,b), \tag{6.5}$$
$$\overline{f}|_{S_1} = f(t,c). \tag{6.6}$$



   Como estas restricciones son funciones de una variable, las ecuaciones que ahora se plantean son

$$\frac{df(a,t)}{dt} = 0, \quad \frac{df(d,t)}{dt} = 0 \quad \frac{df(t,b)}{dt} = 0 \quad \frac{df(t,c)}{dt} = 0.$$

   Después de obtener las soluciones de estas ecuaciones que están en los segmentos que estamos considerando, se calculan los valores de f en esos puntos, y se determina cuales dan el valor máximo (o mínimo).

3. Por último se calcula f en los cuatro vértices (a,b), (a,c), (d,b) y (d,c) y se determina el valor máximo (o mínimo) de esos cuatro valores.

4. El valor máximo (o mínimo) de f será el mayor (o menor) de los obtenidos en los apartados 1'), 2') y 3').

Veamos ahora un **ejemplo**: Determinar los valores (y puntos) máximo y mínimo de la función $f(x,y) = xy^2$ sobre el rectángulo de vértices $(-2,-1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(2,1)$.

Primero calculamos las derivadas parciales e igualamos a cero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0,$$

cuya solución es $y = 0$, y x arbitrario, es decir, las soluciones de esta ecuación que está dentro del interior del rectángulo son todos los puntos de la forma $(x,0)$ con $-2 < x < 2$. En todos esos puntos el valor de f es $f(x,0) = x\ 0^2 = 0$.

A continuación calculamos las derivadas de f restringida a los segmentos que forman la frontera del rectángulo e igualamos a 0:

$$\frac{df(-2,t)}{dt} = -4t = 0, \quad \frac{df(2,t)}{dt} = 4t = 0 \quad \frac{df(t,-1)}{dt} = 1 = 0 \quad \frac{df(t,1)}{dt} = 1 = 0.$$

Las dos últimas ecuaciones no tienes solución (evidentemente). La solución de primera es $t = 0$ y la de la segunda también $t = 0$. Luego hemos de evaluar f en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$, cálculo que ya hicimos antes y cuyo resultado era 0.

Por último calculamos los valores de f en los cuatro vértices:

$$f(-2,-1) = -2, \quad f(2,-1) = 2, \quad f(-2,1) = -2, \quad f(2,1) = 2$$

Comparando todos los valore que hemos obtenido para f en cada uno de los casos anteriores, vemos que el valor máximo es 2 y los puntos máximos $(2, -1)$ y $(2, 1)$ y que el valor mínimo es -2 y los puntos mínimos $(-2, -1)$ y $(-2, 1)$.

Ejercicios

1. Desarrolla en serie de Taylor, hasta los términos de tercer grado, la función $\sin(2x+3y)$ en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

2. Determina los máximos, mínimos y puntos de silla de las siguientes funciones, y calcula también el valor de la función en esos puntos:

   a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$,

   b) $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y$,

   c) $f(x, y) = x^2 + xy$,

   d) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

   e) $f(x, y) = x \sin y$.

3. Determina los máximos, mínimos absolutos de las siguientes funciones en los dominios dados:

   a) $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en la placa triangular cerrada y acotada per las rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer cuadrante.

   b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$, en la placa triangular cerrada y acotada per las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$ en el primer cuadrante.

   c) $f(x, y) = (x^2 - 4x)\cos(y)$, en la región $1 \leq x \leq 3$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

4. Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluida la frontera $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en un punto arbitrario (x, y) es
$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x.$$
   Determina los puntos más calientes y más fríos de la placa, así como su temperatura.

5. Las parciales primeras y el discriminante $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ de cada una de las siguientes funciones es cero en el origen. Determina si la función tiene o no un máximo o un mínimo en el origen, imaginando, en cada caso, el aspecto de la gráfica de la función,

   a) $f(x, y) = x^2y^2$,

b) $f(x, y) = 1 - x^2y^2$,

c) $f(x, y) = xy^2$.

6. Calcula el volumen máximo del paralelepípedo rectangular inscrito en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

7. Calcula las aristas del mayor paralelepípedo rectangular que tiene tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

8. Determina las dimensiones del mayor paralelepípedo rectangular de base cuadrada que se puede cortar de una esfera de madera de radio r.

9. Los lados de un triángulo isósceles miden 20 cm de largo. Determina la longitud de la base cuando el área es máxima.

6.8 Máximos y mínimos condicionados

El problema de los máximos y mínimos condicionados (por una sola condición) es el siguiente: *Maximizar o minimizar una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n variables sujeta a la ligadura (condición) $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, donde g es cualquier otra función de n variables.*

Dicho de otra manera, el problema es encontrar los valores máximo o mínimo de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ cuando la consideramos definida solo sobre una hipersuperficie de nivel $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

Este problema aparece con frecuencia relacionado con el problema anterior del estudio de máximos y mínimos absolutos de una función f definida sobre un dominio D. En efecto, como vimos en la sección anterior, para calcular esos extremos absolutos, estudiábamos los posibles máximos y mínimos de f en el interior de D y, también, en la frontera ∂D de D. Pues bien, en muchos casos ∂D viene dada como una hipersuperficie de nivel, y la obtención de los valores extremos de f sobre ∂D es un problema de máximos y mínimos condicionados. Así, por ejemplo, si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x^2 + y * 2 + z^2 \leq 1\}$, entonces ∂D el el conjunto de puntos que verifican la ecuación $2x^2 + y * 2 + z^2 = 1$.

Para encontrar las soluciones de este problema se aplica el

Teorema 6.7 *Teorema del multiplicador de Lagrange Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas parciales de todos los órdenes, y sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ otra función del mismo tipo. Si f, sujeta a la condición $g(x_1, ..., x_n) = 0$, alcanza un máximo o mínimo en un punto $p = (p_1, ..., p_n)$ en el que $\operatorname{grad} g(p) \neq 0$, entonces $\operatorname{grad} f(p) = \lambda \operatorname{grad} g(p)$ para alguna constante λ (que se llama multiplicador de Lagrange).*

Demostración Sea $S = g^{-1}(0) = \{(x_1, ..., x_n); g(x_1, ..., x_n\}$ (la superficie de nivel 0 de g). Como vimos, $\operatorname{grad} g$ es ortogonal a s en todo punto de S, en particular en el punto p en que f alcanza su máximo o mínimo. Si $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ es una curva de S (i.e. $c(t) \in S$ para todo t) que pasa por p (es decir, existe un t_0 tal que $c(t_0) = p$, o, lo que es lo mismo,

$x_1(t_0) = p_1$, ..., $x_n(t_0) = p_n$), entonces $(f \circ c)(t) = f(c(t))$ es una función de una variable t que tiene un máximo o mínimo en t_0 y, por lo tanto,

$$0 = \frac{df \circ c)}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \langle \operatorname{grad} f(p), \frac{dc}{dt}(t_0) \rangle,$$

luego $\operatorname{grad} f(p)$ es ortogonal a toda curva de S que pasa por p, luego está en la dirección de cualquier vector ortogonal a S, por lo tanto en la dirección de $\operatorname{grad} g$, es decir, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{grad} f(p) = \lambda \operatorname{grad} g(p)$, como queríamos demostrar.

Veamos como se aplica en algunos ejemplos:

E1) Minimizar la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a la condición $2x + y = 3$.

De acuerdo con el teorema anterior, hemos de buscar puntos (x, y) que verifiquen

$$g(x, y) = 2x + y - 3 = 0 \text{ y } (2x, 4y) = \operatorname{grad} f(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y) = \lambda(2, 1),$$

resultando de la igualdad de la derecha que

$$2x = 2\lambda, \text{ y } 4y = \lambda,$$

que sustituido en la primera igualdad da la ecuación $2\lambda + \frac{1}{4}\lambda - 3 = 0$, de donde $\lambda = \frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. Luego el valor mínimo de f sujeta a esa condición, si existe, se da en el punto $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ y su valor es $f(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = 2$.

E2) Determinar los puntos de la superficie $z^2 - 2xy = 3$ más próximos al origen $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Están más próximos al origen los puntos que están a menor distancia, luego lo que queremos es minimizar la función distancia al origen $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, o, lo que es equivalente y más sencillo, minimizar la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Como los puntos más próximos que buscamos han de estar en la superficie $z^2 - 2xy = 3$, la condición o ligadura a la que está sujeta la función f es $g(x, y, z) = z^2 - 2xy - 3 = 0$.

Como antes, hemos de resolver las ecuaciones

$$g(x, y, z) = z^2 - 2xy - 3 = 0 \text{ y } (2x, 2y, 2z) = \operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z) = \lambda(-2y, -2x, 2z),$$

de las cuales, las que corresponden a la segunda igualdad dan lugar a

$$2x = -2\lambda y, \quad 2y = -2\lambda x \quad \text{y} \quad 2z = -2\lambda z,$$

de donde $\lambda = 1$ y $x = -y$. Sustituyendo en la primera igualdad, obtenemos $z^2 + 2x^2 = 3$, de donde se deduce que $z = \sqrt{3 - 2x^2}$ y $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$. Por lo tanto, los puntos de la superficie donde se alcanza la mínima distancia al origen son los puntos de la forma $(x, -x, \sqrt{3 - 2x^2})$, con $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$, y el valor mínimo de la distancia es $d(x, y, z) = \sqrt{f(c, y, z)} = \sqrt{x^2 + (-x)^2 + (\sqrt{3 - 2x^2}))^2} = \sqrt{3}$.

El anterior resultado del multiplicador de Lagrange se generaliza al caso de que haya varias ligaduras o condiciones de la siguiente manera

Teorema 6.8 *(***Teorema de los multiplicadores de Lagrange***) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas parciales de todos los órdenes, y $g_1, ..., g_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ k funciones del mismo tipo ($k < n$). Si f, sujeta a las condiciones $g_1(x_1, ..., x_n) = 0$, ..., $g_K(x_1, ..., x_n) = 0$ alcanza un máximo o mínimo en un punto $p = (p_1, ..., p_n)$ en el que $\operatorname{grad} g_i(p) \neq 0$ para $1 \leq i \leq k$, entonces $\operatorname{grad} f(p) = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(p) + ... + \lambda_k \operatorname{grad} g_k(p)$ para k constantes $\lambda_1, ..., \lambda_k$ (que se llaman multiplicadores de Lagrange).*

Ejercicios

1. Encontrar la distancia más corta entre el punto $(1, 1, 2)$ y el plano $2x - y + 3x = 2$.
2. Minimizar la función $2x^2 + 3y^2$ sujeta a la ligadura $3x + 4y = 1$.
3. Determinar los máximos y mínimos absolutos de la función $3x - y + 4z$ definida sobre el conjunto $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
4. ¿Qué punto de la hipérbola $xy = 5$ minimiza la función $3x + 2y$?.
5. Encontrar el punto de la esfera $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$ que está más lejos del punto $(1, 2, 3)$.
6. Minimizar la función $x^2 - y + 2z^2 - 1$ sujeta a la ligadura $z^2 = x^4 + y^4$.
7. Minimizar la función $2x^2 + y^2 + 3z^2$ sujeta a la ligadura $xyz = 1$.
8. Encontrar el valor mínimo de la función $3x^2 - 2y^2$ definida sobre el conjunto $D = \{(x, y); x + y \leq 2,\ x - y \leq 0\}$.

6.9 Apéndice: ajuste por mínimos cuadrados

Supongamos que estamos estudiando un proceso (por ejemplo una reacción química) en el que nos interesa considerar solo un input (por ejemplo, cantidad de catalizador) y solo un output (por ejemplo, velocidad relativa -respecto de una velocidad estándar- de la reacción química). La cantidad y de output será una función de la cantidad x de input (i.e. $y = f(x)$. Supongamos que tenemos una teoría según la cual f es una función afín, es decir:

$$y = m\,x + n$$

y queremos conocer los valores de las dos constante m y n. Una manera natural de actuar es hacer un experimento y obtener una tabla de valores correspondientes de x e y. Supongamos que la tabla obtenida es la siguiente:

x	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$
y	$y_1 = -0'4$	$y_2 = 0'8$	$y_3 = 2'6$	$y_4 = 3'2$	$y_5 = 5'4$

Un hecho muy notable de estos datos es que no es consistente con la hipótesis $y = m\ x + n$, es decir, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} -0'4 & = m\ 1 + n \\ 0'8 & = m\ 2 + n \\ 2'6 & = m\ 3 + n \\ 3'2 & = m\ 4 + n \\ 5'4 & = m\ 5 + n \end{array}\right\}$$

es inconsistente (es decir, no tiene solución). Pero ello no significa necesariamente que la teoría de que $y = m\ x + n$ sea falsa. Quizás los datos contengan errores. Si la teoría es correcta y los errores no son muy grandes, los datos se pueden usar para estimar m y n. El problema entonces es encontrar la recta $y = mx + n$ (llamada *recta de regresión*) que mejor se ajusta a los datos. Un modo de entender que m y n "se ajustan mejor a los datos" es buscar los valores de m y n que minimicen la función

$$f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2,$$

donde $r_i = y_i - (mx_i + n)$ es la diferencia entre el valor experimental y_i de y y el valor obtenido aplicando la fórmula teórica al valor experimental de x_i.

Puesto que se trata de encontrar los valores de m y n que minimizan f, consideramos f como función de m y n. En el punto mínimo de f debe de anularse la diferencial de f, o, lo que es equivalente, deben de anularse sus derivadas parciales respecto de m y respecto de n. Buscamos, por lo tanto m y n soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial m}(m, n) = -\sum_{i=1}^{5} 2\ r_i\ x_i = 0 \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m}(m, n) = -\sum_{i=1}^{5} 2\ r_i = 0, \tag{6.8}$$

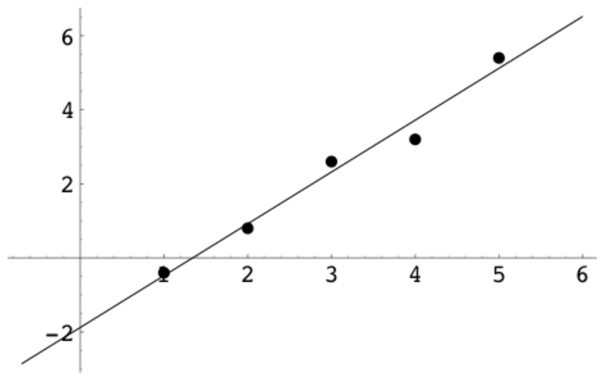
es decir, para un número de observaciones arbitrario k (y no necesariamente 5), m y n son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{k}(y_i - (m\ x_i + n))x_i & = 0 \\ \sum_{i=1}^{k}(y_i - (m\ x_i + n)) & = 0 \end{array}\right\}$$

que son

$$m = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k} y_j\right) - k\sum_{i=1}^{k} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 - k\sum_{i=1}^{k} x_i^2},\ \text{y}\ n = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{k} - m\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}.$$

Si aplicamos estas fórmulas al ejemplo con el que hemos introducido esta cuestión, obtenemos $m = 1'4$ y $n = -1'88$. El correspondiente dibujo de los puntos experimentales y la recta de regresión es:


6
4
2
−2
1
2
3
4
5
6

Capítulo 7

La integral para funciones de una variable

7.1 Primitivas o antiderivadas

Definición *Se dice que una función real f es la primitiva o integral indefinida de otra función real F, y se escribe $f(x) = \int F(x)dx$, si $f'(x) = F(x)$.*

La primitiva de una función verifica las siguientes propiedades:

i) Si f es una primitiva de F y c es una constante, entonces $f+c$ también es una primitiva de F, es decir: Si $\int F(x)dx = f(x)$, entonces, para todo $c \in \mathbb{R}$, $\int F(x)dx = f(x) + c$. En efecto: si $f'(x) = F(x)$, entonces $(f(x) + c)' = f'(x) = F(x)$.

ii) Si f y g son primitivas de F, entonces $f - g = c$ es una constante. Es decir: si $\int F(x)dx = f(x)$ y $\int F(x)dx = g(x)$, entonces $g(x) = f(x) + c$. En efecto, si $f' = F = g'$, entonces $(f - g)' = 0$ luego $f - g = c$ sobre un intervalo.

iii) Si $\int F(x)dx = f(x)$, $\int G(x)dx = g(x)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f(x) + \mu g(x)$ es una primitiva de $\lambda F(x) + \mu G(x)$, es decir $\int (\lambda F(x) + \mu G(x))dx = \lambda f(x) + \mu g(x) + c$, como se comprueba inmediatamente.

Vamos a ver ahora algunos casos en los que resulta fácil calcular la primitiva o integral de una función:

Integrales inmediatas: son las que se deducen inmediatamente de las fórmulas de las derivadas de las funciones elementales. He aquí una lista incompleta:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ si } a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$$
$$\int e^x dx = e^x + c, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c, \qquad \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c,$$
$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c,$$
$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cot x + c, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsh} x + c, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}} dx = \operatorname{arcch} x + c,$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c. \qquad \int \frac{1}{1-x^2} = \operatorname{arcth} x + c.$$

Veamos algunos ejemplos en los que basta con saber esto y tener un poco de ingenio para calcular integrales:

$$\int \frac{3x^2 + 5\sqrt{x} - 4x + 2}{x} dx = \int 3x dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}} - \int 4dx + \int \frac{2}{x} dx = \frac{3x^2}{2} + 10\sqrt{x} - 4x + 2\ln|x| + c,$$

$$\int \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + c,$$

$$\int \frac{1}{x^2+3} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3(c)} dx = -\int (\cos x)^{-3}(-\operatorname{sen} x) dx = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c.$$

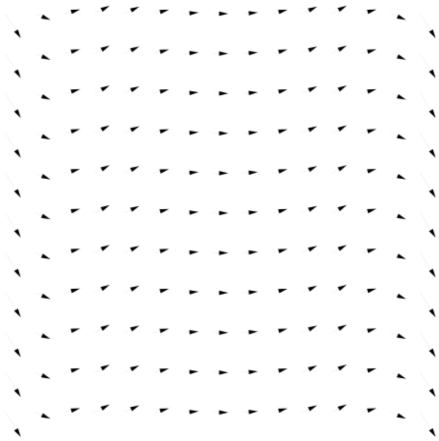
7.2 Las primitivas como soluciones de ecuaciones diferenciales

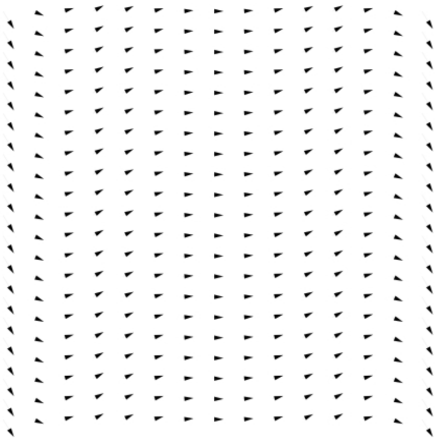
De acuerdo con la definición de primitiva dada en la sección anterior, encontrar una primitiva $f(x)$ de la función $F(x)$ es resolver la ecuación $f'(x) = F(x)$, una ecuación en la que la incógnita es la función $f(x)$. Una ecuación de este tipo, en la que la incógnita es una función y tal que en la expresión de la ecuación aparecen las derivadas de la función incógnita, se llama una ecuación diferencial.

La ecuación $f'(x) = F(x)$ define un campo de direcciones sobre $\mathbb{R}^2$, que asigna a cada punto (x, y) la dirección de la recta que pasa por (x, y) y cuya pendiente es $f'(x) = F(x)$. Una solución $f(x)$ de la ecuación define una curva $x \mapsto (x, f(x))$ (la gráfica de la función f) que, en cada punto $(x, f(x))$, es tangente a la dirección de pendiente $f'(x)$, que es lo mismo que decir que cada función $f(x)$ solución de la ecuación $f'(x) = F(x)$ tiene una gráfica cuya pendiente en cada punto es $f'(x)$. Las curvas solución $x \mapsto (x, f(x))$ se llaman curvas integrales del campo vectorial $(x, y) \mapsto (1, F(x))$.

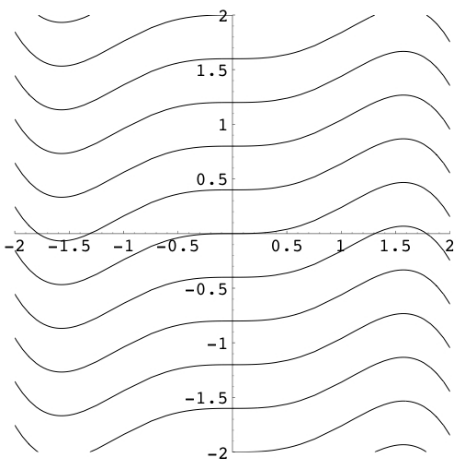
Para representar gráficamente esta interpretación geométrica de la primitiva, conviene representar cada dirección de pendiente $f'(x)$ por el vector $(1, f'(x))$. Vamos a hacer esto con un ejemplo.

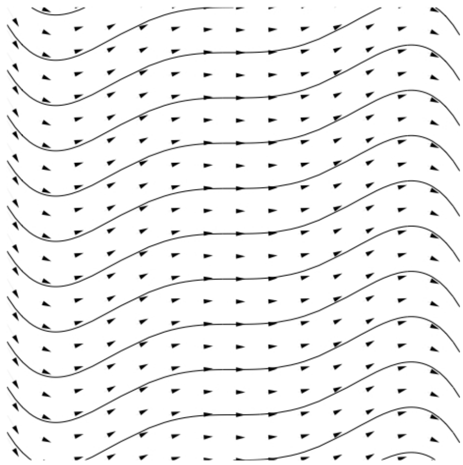
Si queremos calcular las primitivas de $F(x) = x^2 \cos x$, eso es lo mismo que obtener las curvas integrales del campo vectorial $(1,\ x^2 \cos x)$. Este campo vectorial tiene la siguiente representación gráfica:





y sus curvas integrales (que son las gráficas de las primitivas $f(x) = 2\,x \cos x + (x^2 - 2)\operatorname{sen} x + c$), son





7.3 Algunos métodos de integración

Integración por cambio de variable. Vamos a ver como se hace mostrando unos ejemplos. Comenzaremos por uno muy sencillo: el último del caso anterior. Para calcular la última integral vista, hacemos es cambio $y = \cos x$, de donde $dy = -\operatorname{sen} x dx$. Sustituyendo estas expresiones en la integral, integrando respecto de y, y deshaciendo el cambio de variable al final, se obtiene:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3(x)} dx = \int y^{-3}(-dy) = -\int y^{-3} dy = -\frac{y^{-2}}{-2} + c = \frac{(\cos x)^{-2}}{2} + c.$$

Para calcular la integral $\int x^2\sqrt{1+2x}\ dx$ hacemos el cambio $u = 1+2x$, de donde se deduce que $x = (u-1)/2$ y $du = 2dx$. Siguiendo ahora los mismos pasos que en el ejemplo anterior,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+2x}dx &= \int \left(\frac{u-1}{2}\right)^2 u^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}du = \frac{1}{8}\int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})du \\ &= \frac{1}{28}u^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{12}u^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{28}(1+2x)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{10}(1+2x)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{12}(1+2x)^{\frac{3}{2}} + c.\end{aligned}$$

Para calcular la integral $\int \frac{e^{2x+1}}{4+e^x}dx$ haremos el cambio de variable $u = e^x$, así $du = e^x dx$ y

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x+1}}{4+e^x}dx &= e\int \frac{(e^x)^2}{4+e^x}dx = e\int \frac{u}{4+u}du = e\int \frac{4+u-4}{4+u}du \\ &= e\int \left(1 - \frac{4}{4+u}\right)du = e(u - 4\ln|u+4|) + c = e^{x+1} - 4e\ln(e^x+4) + c.\end{aligned}$$

Integración por partes. Se basa en la regla de derivación de un producto. Si u y v son funciones de x, recordemos que $(u\ v)' = u'\ v + u\ v'$, de donde se deduce que $u\ v = \int (u\ v)'\ dx = \int u'\ v\ dx + \int u\ v'\ dx$, de donde

$$\int u'\ v\ dx = u\ v - \int u\ v'\ dx + c,$$

que es la llamada fórmula de integración por partes. Veamos algunos ejemplos.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int (\operatorname{sen} x)'\cos x\ dx = \operatorname{sen} x\cos x - \int \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)dx \\ &= \operatorname{sen} x\cos x + \int \operatorname{sen}^2 x dx = \operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\cos^2 x)dx \\ &= \operatorname{sen} x\cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx,\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$2\int \cos^2 x dx = \operatorname{sen} x\cos x + \int dx = \operatorname{sen} x\cos x + x,$$

luego

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x\cos x + x) + c.$$

Una vez conocida esta integral es fácil calcular

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int (1-\cos^2 x)dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\cos x) + c,$$

que también podría haberse calculado por partes como antes. Otro ejemplo es

$$\int \ln x dx = \int (x)' \ln x \ dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

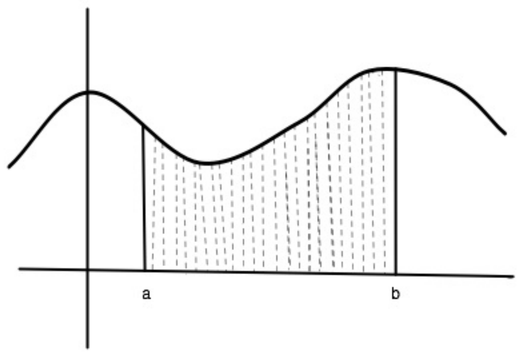
y otro

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int e^{-x} \ x \ dx = \int (-e^{-x})' \ x \ dx$$
$$= -e^{-x} \ x - \int (-e^{-x}) dx = -e^{-x} \ x - e^{-x} + c.$$

7.4 La integral definida

La integral de una función real entre dos extremos de un intervalo es el área, con signo, de la zona limitada por la gráfica de la función, el eje de las x y los dos segmentos verticales que van desde los extremos del intervalo a la gráfica de la función. El signo del área se toma positivo en las zonas con coordenada $y > 0$ y negativo en las zonas con coordenada $y < 0$. Gráficamente:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{área(zona rayada)}$$



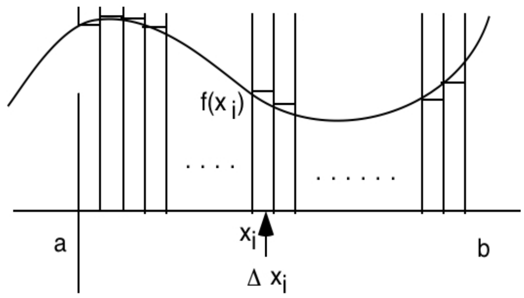
Esta área de la zona rayada se calcula de modo aproximado dividiendo el intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ ($a = x_1 < x_2 < ... < x_N < b$) de longitud $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ muy pequeña, calculando el área de los rectángulos de base Δx_i y altura $f(x_i)$ y sumando las áreas de estos rectángulos. La integral o área rayada se define como el límite de estas sumas (si existe) cuando $\Delta x_i \to 0$, esto es:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i,$$

(Con frecuencia, escribiremos esto con la notación más condensada $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x.$)

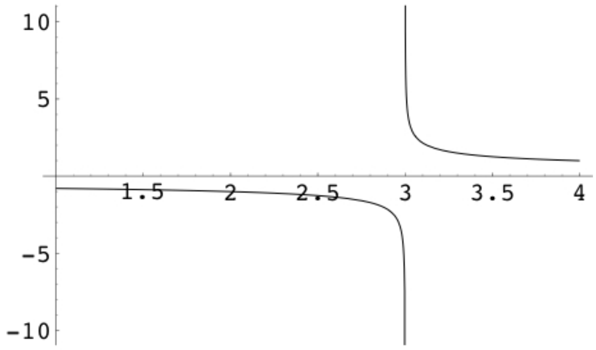
o, de un modo más formal, dando a todos los Δx_i el mismo valor,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\frac{b-a}{N}.$$



Este límite (y, por tanto, $\int_a^b f(x)dx$) existe cuando $a, b \in \mathbb{R}$ y f es contínua, pero también existe en otros casos en que estas condiciones no se cumplen, por ejemplo:

$$\int_1^4 \frac{1}{(x-3)^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{3}{2}(1 - 2^{\frac{2}{3}})$$



La integral definida verifica las propiedades:
i) $\int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$,
ii) $\int_a^b (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$,
iii) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$,, siendo $a \leq b \leq c$.

El teorema fundamental del Cálculo o regla de Barrow relaciona la integral que acabamos de definir con la primitiva o integral indefinida que definimos en la sección anterior, y dice lo siguiente:

Teorema fundamental del Cálculo o regla de Barrow. *Si f es una función contínua e integrable sobre el intervalo $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

siendo F una función diferenciable que verifica $F'(x) = f(x)$, es decir, siendo F una primitiva o integral impropia de f.

Idea de la demostración Consideremos la función

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

su derivada verificará, teniendo en cuenta la propiedad iii),

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x},$$

y, como para Δx pequeño, f varía poco en el intervalo $[x, x+\Delta x]$, usando la propiedad i) se tiene que, aproximadamente, $\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(x)\Delta x$, luego

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x),$$

y, de la propia definición de $F(x)$, se tiene $F(a) = 0$ y, por tanto,

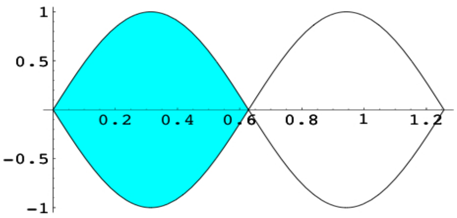
$$F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx,$$

lo que acaba la idea de la demostración del teorema.

7.5 Aplicaciones del cálculo integral

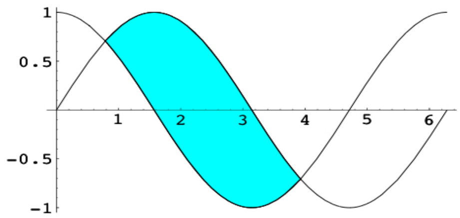
De la propia definición se deduce que las integrales sirven para calcular áreas. Así, el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} 5x$ y $y = -\operatorname{sen} 5x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/5$ (zona rayada de la figura adjunta,

$$\text{Area} = \int_0^{\pi/5} \operatorname{sen} 5x dx - \int_0^{\pi/5} (-\operatorname{sen} 5x) dx$$
$$= -\frac{\cos 5x}{5}\Big|_0^{\pi/5} - \frac{\cos 5x}{5}\Big|_0^{\pi/5} = \frac{2}{5} - (-\frac{2}{5}) = \frac{4}{5}.$$



El área de la región limitada por las gráficas de las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ desde el primer x positivo en que se cortan hasta el segundo (ver figura) es

$$\text{Area} = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x dx - \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos x dx$$
$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx$$
$$= -\cos x - \sin x|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

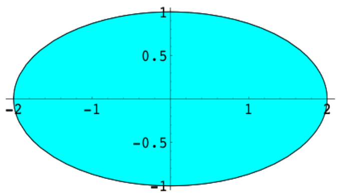


El área de la región $\mathcal{R}$ de la figura siguiente, limitada por la elipse

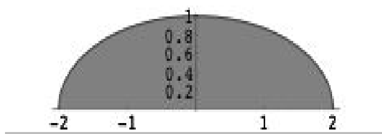
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la calculamos dividiendo la elipse en dos zonas $\mathcal{R}_+$ y $\mathcal{R}_-$ de modo que cada una de ellas sea la gráfica de una función, lo que es fácil de conseguir despejando y de la ecuación anterior de la elipse

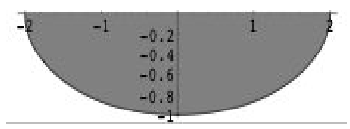
$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$



región $\mathcal{R}$ limitada por la elipse



región $\mathcal{R}_+$ limitada por $y = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}$



región $\mathcal{R}_-$ limitada por $y = -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}$

$$\text{Area}(\mathcal{R}) = \text{Area}(\mathcal{R}_+) + \text{Area}(\mathcal{R}_-)$$
$$= \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx + \left| \int_{-a}^{a} \left(-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx \right| = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx,$$

y resolvemos esta última integral haciendo el cambio de variable

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen} u, \quad \text{lo que da} \quad \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \cos u \quad \text{y} \quad dx = a \cos u du,$$

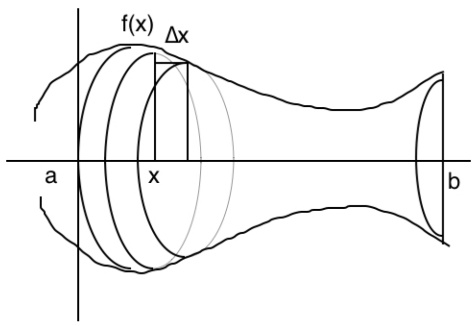
de donde resulta que si x varía entre $-a$ y a, entonces u varía entre $\operatorname{arcsen}(-1) = -\pi/2$ y $\operatorname{arcsen} 1 = \pi/2$, y

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos^2(u) du = \frac{a}{2} \left. (\operatorname{sen} u \cos u + u) \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a}{2}\pi,$$

que, sustituido en la expresión de Area($\mathcal{R}$) da

$$\text{Area}(\mathcal{R}) = 2b\frac{a}{2}\pi = \pi ab.$$

La integral definida también permite el cálculo del **volumen de un sólido de revolución** $\mathcal{S}$, que es volumen de $\mathbb{R}^3$ limitado por la superficie obtenida por la rotación de la gráfica de una función f alrededor del eje X, y dos planos de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.



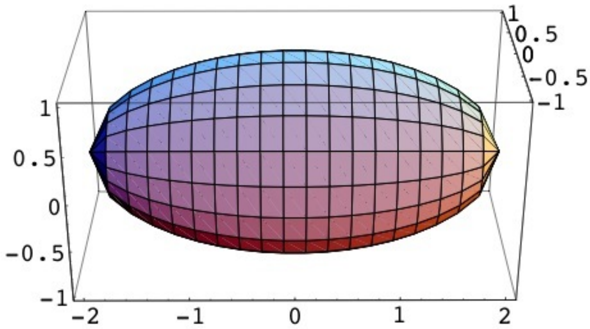
La idea para aplicar el cálculo integral es que, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en que está definida la función f en subintervalos de longitud pequeña Δx, el volumen que se quiere calcular vendrá bien aproximado por la unión de cilindros de radio $f(x)$ y altura Δx, de modo que

$$Volume(\mathcal{S}) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi f(x)^2 \Delta x = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

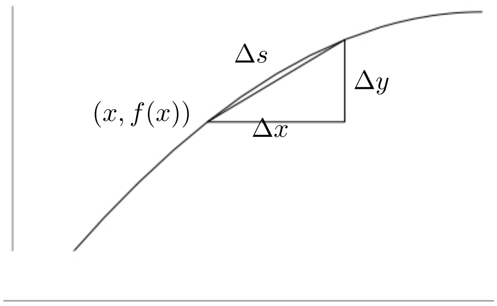
Como ejemplo, podemos calcular el volumen del elipsoide de revolución obtenido por rotación de la elipse del ejercicio anterior. Por lo que ya vimos, este elipsoide $\mathcal{E}$ se puede obtener por revolución de la gráfica de la función $y = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}$. Por lo tanto, aplicando la fórmula anterior

$$Volume(\mathcal{E}) = \int_{-a}^{a} \pi b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left. x - \frac{x^3}{a^2 3} \right|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

.



También se puede usar la integración para calcular **la longitud de una curva** que es la gráfica Γ de una función f del siguiente modo: Dividiendo de nuevo el intervalo $[a,b]$ donde esté definida la función en subintervalos de longitud pequeña Δx, la longitud del segmento de gráfica entre $(x, f(x))$ y $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ viene aproximada por el segmento de recta Δs entre esos mismos puntos, y los segmentos Δx, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x))$ y Δs forman un triángulo rectángulo, luego $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + \Delta y)^2$, y



$$\text{Longitud}(\Gamma) = \lim_{\Delta x\to 0} \sum \Delta s = \lim_{\Delta x\to 0} \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta y)^2}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \sum \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \sum \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}\Delta x = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

También se puede calcular el **área de una superficie de revolución** obtenida por rotación de la gráfica de una función f entre los valores $x = a$ y $x = b$. Un razonamiento similar al empleado para el cálculo de volúmenes de revolución, teniendo en cuenta el modo en que hemos deducido la expresión anterior para la longitud de una curva permite ver que una tal área viene dada por

$$\text{Area} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

7.6 Métodos numéricos de integración

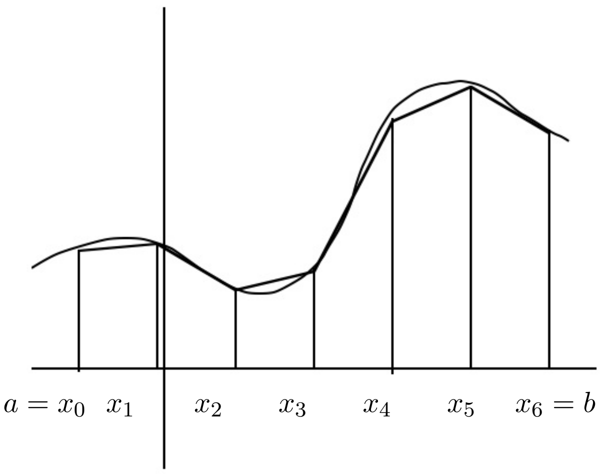
A pesar de los muchos métodos de integración que existen, para la mayor parte de las funciones no es posible encontrar una primitiva. En esos casos, para encontrar un valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ no queda más remedio que acudir a métodos numéricos que dan valores aproximados de la misma. Estos métodos numéricos son los que emplean los distintos programas que usan los ordenadores. Para hacerse una idea de como trabajan esos programas, vamos a describir los dos métodos más sencillos, que se basan muy directamente en la misma definición de integral.

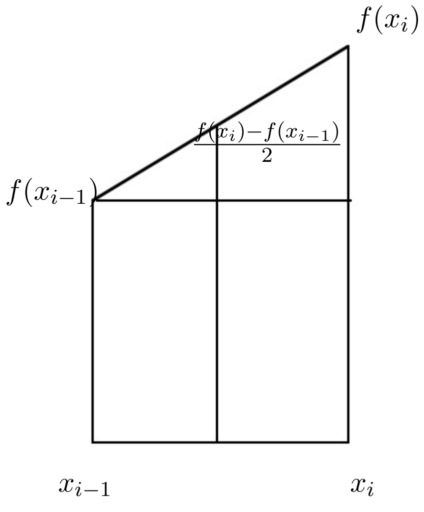
Método de los trapecios. Para calcular la integral entre a y b de una función f, se divide el intervalo $[a,b]$ en N partes iguales, de longitud $h = \frac{b-a}{N}$; es decir, se hace la partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b$ del intervalo $[a,b]$ con $x_i - x_{i-1} = h = \frac{b-a}{N}$, para $1 \leq i \leq N$, y se toma como valor aproximado de la integral la suma de las áreas A_i de los trapecios de vértices $(x_{i-1},0)$, $(x_i,0)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_{i-1}, f(x_i))$. El área de cada uno de estos trapecios es (ver figura)

$$A_i = (x_i - x_{i-1})\left(f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2}\right) = h\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right),$$

por lo tanto, el valor aproximado de la integral $I_T(f)$ dado por el método de los trapecios es

$$\begin{aligned} I_T(f) &= \sum_{i=1}^{N} h\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) \\ &= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} + ...\right. \\ &\qquad\qquad \left. ... + \frac{f(x_{N-2})+f(x_{N-1})}{2} + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}\right) \\ &= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{N-2}) + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2}\right) \end{aligned}$$





Se puede demostrar usando el desarrollo de Taylor que el error cometido por este procedimiento al calcular una integral es

$$\text{error aproximado } = \frac{1}{12}(b-a)\ h^2\ \left(f''\right),$$

donde (f'') representa un valor medio de f'' en $[a,b]$.

Como ejemplo, vamos a escribir como se haría el cálculo de la integral $\int_a^b f(x)\ dx$ usando el método de los trapecios con *Mathematica*. La regla, para una subdivisión de $[a,b]$ en n intervalos sería:

$$\text{trapeciorule}[n\_] := \sum_{i=1}^{n-1} f[a+i\frac{b-a}{n}]\frac{b-a}{n} + \frac{f[a]+f[b]}{2}\frac{b-a}{n}.$$

Si la aplicamos al ejemplo f[x_]:= Log[Sin[x]], tomando como límites de integración $a = 0.11$, $b = \pi - 0.1$, obtenemos, usando la instrucción de Mathematica Table[trapeciorule[n],n,2,100], la siguiente lista de valores aproximados de $\int_{0.11}^{\pi-0.1} \ln[\sin[x]\ dx$, para el número de divisiones n del intervalo variando de 2 a 100:

-3.30799, -2.44855, -2.08898, -1.90219, -1.79206, -1.72143, -1.67335, -1.6391, -1. 61382, -1.59463, -1.57971, -1.56788, -1.55835, -1.55055, -1.54409, -1.53868, -1.5341, - 1.5302, -1.52684, -1.52393, -1.52139, -1.51917, -1.51721, -1.51547, -1.51392, -1. 51254, -1.5113, -1.51018, -1.50916, -1.50825, -1.50741, -1.50665, -1.50595, -1.50531, - 1.50472, -1.50418, -1.50368, -1.50322, -1.50279, -1.50239, -1.50202, -1.50167, -1. 50135, -1.50105, -1.50076, -1.5005, -1.50025, -1.50001, -1.49979, -1.49959, -1.49939, - 1.4992, -1.49903, -1.49886, -1.49871, -1.49856, -1.49842, -1.49828, -1.49816, -1. 49803, -1.49792, -1.49781, -1.4977, -1.4976, -1.49751, -1.49742, -1.49733, -1.49724, - 1.49716, -1.49709, -1.49701, -1.49694, -1.49687, -1.49681, -1.49675, -1.49669, -1. 49663, -1.49657, -1.49652, -1.49647, -1.49642, -1.49637, -1.49632, -1.49628, -1.49623, -1.49619, -1.49615, -1.49611, -1.49607, -1.49604, -1.496, -1.49597, -1.49594, -1.4959, -1.49587, -1.49584, -1.49581, -1.49578, -1.49576.

Si hacemos el cálculo con Mathematica con NIntegrate, obtenemos
NIntegrate[Log[Sin[x]],x,0.11,Pi-0.1]
-1.4944.

Como se ve, para funciones complicadas es necesario tomar un valor grande de n para encontrar un valor de la integral próximo al real.

Método de Simpson. El método de los trapecios usa interpolación lineal para aproximar los valores de $f(x)$ entre cada dos puntos de los extremos de los subintervalos en que se divide $[a,b]$ (es decir, aproxima $f(x)$ entre x_{i-1} y x_i por los de una función cuya gráfica es una recta que pasa por los puntos $(x_{i-1}, f(x_i))$ y $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$). El método de Simpson aproxima f por arcos de parábola que pasan por los mismos puntos. Para ello se divide el intervalo $[a,b]$ en el que se vaya a hacer la integración en $2N$ partes iguales, es decir, se considera la partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2N-1} < x_{2N} = b$ del intervalo $[a,b]$ con $x_i - x_{i-1} = h = \frac{b-a}{2N}$. Para cada i impar se define la función aproximación g de la función f que se desea integrar de la siguiente manera:

$$g(x_i + y) = f(x_i) + a\ y + b\ y^2, \qquad \text{con} \qquad y \in [-h,h] \qquad \text{y} \qquad 1 \leq i \leq 2N-1,$$

donde a y b son las constantes necesarias para que se verifique

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= g(x_i + h) = f(x_i) + a\ h + b\ h^2 \quad y \\ f(x_{i-1}) &= g(x_i - h) = f(x_i) - a\ h + b\ h^2. \end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones de (**??**) se obtiene

$$b\ h^2 = \frac{1}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)\right). \tag{7.1}$$

Aproximando cada trozo de la integral de f entre x_{i-1} y x_{i+1} por la integral A_i entre los mismos límites de g, tenemos

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)\ dx = \int_{-h}^{h} \left(f(x_i) + a\ y + b\ y^2\right) dy = 2\ h\ f(x_i) + \frac{2}{3} b\ h^3,$$

y, sustituyendo (7.1) en la última expresión,

$$A_i = 2\,h\,f(x_i) + \frac{2}{3} h \frac{1}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)\right) = frac13h\left(4\ f(x_i) + f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\right),$$

de donde resulta que el valor aproximado I_S de $\int_a^b f(x)dx$ por el método de Simpson es

$$I_S = \sum_{i=0}^{N} A_{2i+1} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2N}) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i})\right).$$

Como en el caso del método de los trapecios, se puede demostrar usando el desarrollo de Taylor que el error cometido por este procedimiento al calcular una integral es

$$\text{error aproximado } = \frac{1}{180}(b-a)\ h^4\ \left(f^{(4)}\right),$$

donde $\left(f^{(4)}\right)$ representa un valor medio de la cuarta derivada de f en $[a, b]$.

La regla, usando Mathematica, para calcular una integral de una función f entre los extremos a y b por el método de Simpson, usando $2n$ subdivisiones del intervalo $[a, b]$ sería

$$\begin{aligned}\text{simpsonrule}[n\_] := \frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}\Bigg(& f[a] + f[b] + 4\sum_{i=0}^{n-1} f[a + (2i+1)\frac{b-a}{2\ n}] \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n-1} f[a + (2i)\frac{b-a}{2\ n}]\Bigg).\end{aligned}$$

Si aplicamos el método de Simpson al mismo ejemplo al que aplicamos el método de los trapecios, f[x_]:= Log[Sin[x]], tomando como límites de integración $a = 0.11$, $b = \pi - 0.1$, obtenemos, usando la instrucción de Mathematica Table[simpsonorule[n],n,2,100], la siguiente lista de valores aproximados de $\int_{0.11}^{\pi-0.1} \ln[\sin[x]\ dx$, para el número de divisiones $2n$ del intervalo variando de 2 a 100:

-2.20534, -1.68265, -1.57322, -1.53481, -1.5177, -1.50893, -1.50398, -1.501, -1.4991, -1.49785, -1.49698, -1.49638, -1.49594, -1.49561, -1.49537, -1.49518, -1.49504, -1. 49493, -1.49484, -1.49477, -1.49471, -1.49466, -1.49463, -1.49459, -1.49457, -1.49455, -1.49453, -1.49451, -1.4945, -1.49449, -1.49448, -1.49447, -1.49446, -1.49445, -1. 49445, -1.49444, -1.49444, -1.49443, -1.49443, -1.49443, -1.49443, -1.49442, -1.49442, -1.49442, -1.49442, -1.49442, -1.49441, -1.49441, -1.49441, -1.49441

donde se ve que, en este ejemplo, el método de Simpson da mejores resultados que el de los trapecios. Generalmente suele ser así.

Ejercicios

(1) $\int (x^2 - 2\operatorname{sen} x)dx.$ (2) $\int (x^2 - 2\cos x)dx.$ (3) $\int (a^x - e^x)dx.$

(4) $\int (x - \frac{1}{x})dx.$ (5) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx.$ (6) $\int (1 - \operatorname{sen} x + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x})dx.$

(7) $\int \cos 5x dx.$ (8) $\int \cos(\frac{3}{4}x)dx.$ (9) $\int \cos(\frac{1}{2} + \frac{x}{4})dx.$

(10) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(ax-b)}dx.$ (11) $\int \frac{xdx}{a^2+x^2}.$ (12) $\int \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}.$

(13) $\int x \ln x dx.$ (14) $\int x \cos x dx.$ (15) $\int x^2 \ln x dx.$

(16) $\int x^2 \cos x dx.$ (17) $\int e^x \cos x dx.$ (18) $\int e^x \operatorname{sen} x dx.$

(19) $\int x^2 \cos^2 x dx.$ (20) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$ (21) $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx.$

(22) $\int \frac{adx}{b+cx}.$ (23) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}dx.$ (24) $\int \frac{2xdx}{(x-1)^3}.$

(25) Calcular $\int \frac{2x^2-2}{(x-1)^2(x-2)}dx,$ usando que $\frac{5}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$

(26) Encuentra el área limitada por el arco de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y la recta $x = m > a$.

(27) Encuentra la proporción entre las áreas de las regiones en que la curva $y = 3x^2$ divide al triángulo formado por el eje x, la recta $y = \lambda x$ y la ordenada correspondiente al punto de intersección de la recta con la curva.

(28) Encuentra el área limitada por la curva $x^2 = 64y^3$ y la recta $x = 8y$.

(29) Encuentra el área limitada por las curvas $y^2 = 4x$ y $y^2 = x + 3$. Solución: 8.

(30) Encuentra el área limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $x = y$.

(31) Encuentra el área limitada por la curva $8y = x^3$ y la recta $2x = y$.

(32) Encuentra el área limitada por la curva $y^2 = 9x$ y la recta $2x = y$.

(33) Encuentra el área limitada por la curva $y = 4x - x^2$ y la recta $y + 2x - 8 = 0$.

(34) Encuentra el área limitada por la curva $y = 2x^2$ y la recta $2x = y - 4$.

(35) Encuentra el área limitada por las curvas $y = x^3$ y $y^2 = x$.

(36) Encuentra el área limitada por la curva $y^2 = x + 1$ y la recta $x = y$.

(37) Encuentra el área limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$.

(38) Encuentra el área limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = x^4$.

(39) Encuentra el volumen del elipsoide de revolución que se obtiene al hacer girar una elipse de semiejes a y b. Como consecuencia, encuentra el volumen de una esfera de radio a.

(40) Encuentra el volumen de la figura que se obtiene al girar sobre el eje x el área limitada por las siguientes curvas: $y = x^3, y = 0, x = 1, x = 2$.

Capítulo 8

Ecuaciones diferenciales ordinarias

8.1 Conceptos generales

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que la incógnita es una función y que contiene la incógnita y, la variable x de la que depende la incógnita y las derivadas $y^{(n)}$ de la incógnita. Es decir, es una expresión de la forma

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Se llama **orden** de la ecuación diferencial al orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Así, por ejemplo, la ecuación $y'' + y' = y$ es una ecuación de segundo orden, mientras que la ecuación $y' + y^2 = 0$ es de primer orden.

Una **solución** de una ecuación diferencial es una función $y(x)$ que al sustituirla en la ecuación diferencial da una identidad. La solución de una ecuación diferencial no es única. De hecho el lector ya conoce las ecuaciones diferenciales más sencillas, las que son de la forma $y' = f(x)$. La solución de una tal ecuación no es más que la primitiva de $f(x)$, que ya conoce el lector está definida salvo una constante. Es decir, son soluciones de la ecuación diferencial anterior todas las funciones $y(x)$ de la forma $y(x) = \int f(x)dx + c$, siendo c una constante arbitraria. Se llama **solución general de una ecuación diferencial** a una solución de la ecuación diferencial que depende de constantes y tal que cualquier solución de la ecuación diferencial se obtiene de esta solución general dándole valores apropiados a las constantes. Todas las ecuaciones diferenciales que veremos en este curso tienen una solución general que depende de tantas constantes como sea el orden de la ecuación diferencial, es decir: una ecuación diferencial de orden n tendrá una solución general que dependerá de n constantes.

Una manera de fijar una solución particular (es decir, de fijar los valores de las constantes arbitrarias) de una ecuación diferencial es imponer condiciones (a menudo vienen impuestas estas condiciones por el problema físico que ha originado la ecuación). Las condiciones que estudiaremos son de dos tipos: **las condiciones iniciales**, que fijan el valor de la función y sus derivadas hasta el orden $n - 1$ si la ecuación diferencial es de orden n en un punto dado x_0, y las **condiciones de contorno**, que fijan los valores de la función en los extremos de un intervalo.

Así, por ejemplo, la ecuación diferencial $y'' = 0$ tiene como solución general $y = ax + b$. Si fijamos las *condiciones iniciales* $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, entonces la única solución verificando estas condiciones es $y(x) = 2x+1$. Si fijamos las *condiciones de contorno* $y(0) = 1$, $y(4) = 5$, entonces la única solución verificando estas condiciones es $y = x + 1$.

Una solución elemental de una ecuación diferencial es una solución $y(x)$ que es una combinación de las funciones elementales que hemos estudiado en este curso. No siempre (se podría decir que casi nunca) existe una solución elemental de una ecuación diferencial, pero hay ocasiones en que es posible, al menos, dar una **solución implícita** usando funciones elementales. Incluso hay ocasiones en que la solución en modo implícito es más cómoda que la solución explícita. Así, por ejemplo, la ecuación diferencial $3y^2y' + xy' + y = 0$ tiene como solución implícita $y^3 + xy = C$, que es más manejable que la solución explícita

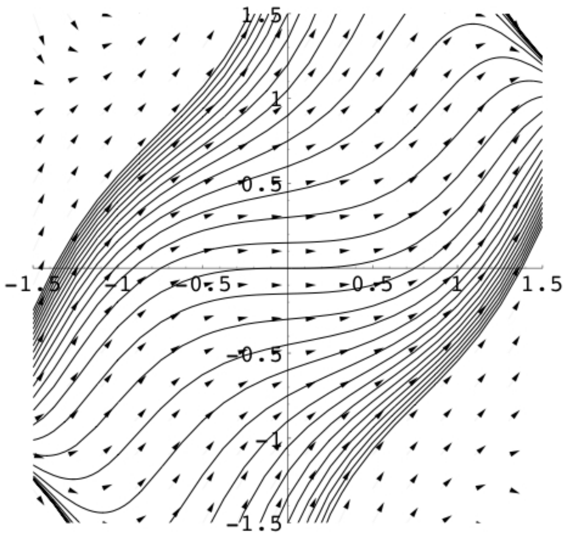
$$y = \frac{-2^{\frac{1}{3}}\ x}{(27C + \sqrt{729C^2 + 108x^3})^{\frac{1}{3}}} + \frac{(27C + \sqrt{729C^2 + 108x^3})^{\frac{1}{3}}}{3\ (2)^{\frac{1}{3}}}.$$

8.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

La primitiva de una función es un caso particular de una ecuación diferencial de primer orden. Como ocurría con las primitivas, todas las ecuaciones diferenciales de primer orden admiten una interpretación geométrica en términos de campos vectoriales. En efecto, igual que con las primitivas, *una solución de una ecuación diferencial de la forma* $y' = f(x, y)$ *es una función* $y(x)$ *cuya gráfica es una curva cuyo vector tangente en cada punto* $(x, y(x))$ *es* $(1, y'(x)) = (1, f(x, y))$.

A diferencia de lo que ocurría en el caso de las primitivas, en una ecuación diferencial general de primer orden $y' = f(x, y)$, la dirección $(1, f(x, y))$ que se asigna a cada punto (x, y) depende también de y, y no sólo de x, como en las primitivas.
Este es el hecho fundamental que permite distinguir los campos vectoriales en el plano que proceden de ecuaciones diferenciales de primer orden generales de los que proceden de las más sencillas, las primitivas. Consecuencia de este hecho sobre el campo vectorial o ecuación es que las soluciones de la ecuación (curvas tangentes al campo) ya no difieren entre sí de un modo tan sencillo como las primitivas, ya no es cierto que dos soluciones difieran tan solo en una constante. Veamos un ejemplo:

La ecuación diferencial $y' = (x^2+y^2)\cos(xy)$ da lugar al siguiente campo vectorial con sus correspondientes curvas tangentes (*curvas integrales* se suelen llamar)



Ecuaciones diferenciales de variables separables: son aquellas que pueden escribirse de la forma

$$f(y)dy + g(x)dx = 0.$$

Su solución general es
$$\int f(y)dy + \int g(x)dx = C.$$
Veamos dos ejemplos:

• $(x+1)y' = x(y^2+1)$. Se escribe primero en la forma $(x+1)dy = x(y^2+1)dx$, y, luego, se pasa la variable y a un lado de la ecuación y la x al otro:
$$\frac{1}{y^2+1}dy = \frac{x}{x+1}dx,$$
de modo que la solución general se puede obtener integrando a ambos lados de la ecuación
$$\int \frac{1}{y^2+1}dy = \int \frac{x}{x+1}dx + C,$$
la integral de la izquierda es $\operatorname{arctg} y$ y la de la derecha es $\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int (1 - \frac{1}{x+1})dx = x - \ln|x+1| + C$, de donde
$$\operatorname{arctg} y = x - \ln|x+1| + C, \quad \text{y} \quad y = \operatorname{tg}\left(x - \ln|x+1| + C\right).$$

• $y' = ky$. Pasando todos los términos que contienen la incógnita y a un lado, y la variable independiente x al otro, como antes, resulta: $\frac{dy}{y} = k\ dx$, e, integrando en ambos miembros de la igualdad, $\ln y = kx + C$, y $y = e^{kx}C_1$.

Ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas Son aquellas que se pueden escribir de la forma
$$y' = F(\frac{y}{x}).$$
Una manera frecuente de reconocer una ecuación de este tipo es ver que se puede poner de la forma
$$y' = \frac{A(x,y)}{B(x,y)} \quad \text{o, equivalentemente} \quad A(x,y)\ dx = B(x,y)\ dy,$$
donde $A(x,y)$, $B(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. *Una función $f(x,y)$ se dice que es homogénea de grado n si, para cualquier λ, se verifica $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$.* En general, son funciones homogéneas de grado n todos los polinomios homogéneos de grado n.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas se pueden reducir a una de variables separables haciendo el cambio de variable
$$\frac{y}{x} = v, \quad \text{que da} \quad y = v\ x, \quad y' = v + v'\ x,$$
lo que, sustituido en la ecuación inicial, da
$$v + v'\ x = F(v), \quad x\ dv + v\ dx = F(v)\ dx, \quad \frac{dv}{v - F(v)} + \frac{dx}{x} = 0,$$
que es una ecuación de variables separables, que se resuelve como indicamos en el caso anterior.

Veamos un ejemplo. La ecuación $(x^2+y^2)\ dx + 2\ x\ y\ dy = 0$ es del tipo $A\ dx + B\ dy$, donde A y B son polinomios homogéneos de grado 2, luego se trata de una ecuación diferencial de primer orden homogénea, luego conviene hacer el cambio $v = y/x$, es decir, $y = v\ x$, con lo que

$$dy = v\ dx + x\ dv, \quad x^2 + y^2 = x^2 + v^2\ x^2, \quad 2\ x\ y = 2\ x^2\ v,$$

y, sustituyendo en la ecuación,

$$(x^2 + v^2\ x^2)\ dx + 2\ x^2\ v^2\ dx + 2\ x^3\ v\ dv = 0, \quad (1 + 3\ v^2)\ x^2\ dx + 2\ x^3\ v\ dv = 0,$$

y, agrupando a un lado los términos en x y a otro los términos en v, queda

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2\ v}{1 + 3\ v^2} dv,$$

ecuación de variables separables que, integrando a cada lado, da

$$\ln x = -\int \frac{2\ v}{1 + 3\ v^2} dv = -\frac{1}{3} \ln(1 + 3\ v^2) + \ln C,$$

de donde $x = C\ (1 + 3\ v^2)^{-1/3}$, y, elevando al cubo, y deshaciendo el cambio $v = y/x$, y operando,

$$x^3 = C\ \left(1 + 3\ \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{-1}, \quad x^3\ y^2 + x^3 = C, \quad y^2 = \frac{C - x^3}{3\ x}, \quad y = \sqrt{\frac{C - x^3}{3\ x}}.$$

Otro ejemplo: La ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

está claramente escrita en la forma $y' = F(y/x)$, luego es homogénea, y, para resolverla, hacemos el cambio $y = v\ x$, con el que $y' = v + xv'$, y la ecuación queda

$$v + x\ v' = v + \operatorname{tg} v, \quad \text{esto es} \quad x\ v' = \operatorname{tg} v, \quad \text{y, agrupando variables,} \quad \cot v\ dv = \frac{dx}{x},$$

que es una ecuación de variables separables cuya solución es

$$\int \cot v\ dv = \int \frac{1}{x}\ dx, \quad \ln \operatorname{sen} v = \ln x + C, \quad \operatorname{sen} v = e^C\ x,$$

y, deshaciendo el cambio,

$$\operatorname{sen} \frac{y}{x} = e^C\ x, \quad y = x\ \operatorname{arcsen} A\ x,$$

donde $A = e^C$ es una constante arbitraria.

Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales Son aquellas que se pueden escribir de la forma

$$y' + P(x)\ y = Q(x),$$

donde P y Q son funciones arbitrarias de x. El truco para resolver una tal ecuación consiste en multiplicar y por una función $\rho(x)$ de modo que se verifique la ecuación

$$(\rho\ y)' = \rho\ y' + \rho\ P\ y, *$$

de este modo, la ecuación diferencial originaria se convierte en

$$(\rho y)' = \rho\ Q, \quad \text{cuya solución es} \quad \rho(x)\ y = \int \rho(x)\ Q(x)\ dx + C, **$$

y la función ρ se obtiene de (*) del siguiente modo:

$$\rho\ y' + \rho\ P\ y = \rho\ y' + \rho'\ y, \quad \text{de donde} \quad \rho'\ y = \rho\ P\ y, \ \text{i.e.} \quad \rho' = \rho\ P,$$

de donde

$$\ln \rho = \int P\ dx + c, \qquad \rho = C\ e^{\int P\ dx},$$

y, por ser lo más cómodo, tomaremos $C = 1$. Veamos algunos ejemplos:

Resolver la ecuación: $y' + y = e^x$. Es una ecuación lineal con $P = 1$ y $Q = e^x$. Entonces

$$\rho = \ e^{\int P\ dx} = e^x,$$

y, sustituyendo en (**),

$$e^x\ y = \int e^x\ e^x\ dx + C = \frac{1}{2}\ e^{2x} + C, \quad \text{de donde} \quad y = \frac{1}{2}\ e^x + C\ e^{-x}.$$

Resolver la ecuación: $x\ y' + 3\ y = x^2$. Dividiendo por x la ecuación resultante es

$$y' + \frac{3}{x}\ y = x,$$

que es una ecuación lineal con $P = -3/x$ y $Q = x$. Entonces

$$\rho = \ e^{\int P\ dx} = e^{-\int \frac{3}{x}\ dx} = e^{-3 \ln x} = e^{\ln x^3} = e^{\ln(1/x^3)} = \frac{1}{x^3},$$

y, sustituyendo en (**),

$$\frac{1}{x^3}\ y = \int \frac{1}{x^3}\ x\ dx + C = \int\ x^{-2}\ dx + C = -x^{-1} + C, \quad \text{de donde} \quad y = -x^2 + C\ x^3.$$

8.3 Ecuaciones diferenciales de segundo orden reducibles a una de primer orden

Ecuaciones diferenciales de segundo orden sin variable dependiente. Son de la forma $F(x, y', y'')) = 0$. Se transforman en una de primer orden haciendo el cambio de variable $p = y'$, de donde sale $p' = y''$, quedando la ecuación de primer orden $F(x, p, p') = 0$, que se resuelve, obteniendo $p = \phi(x, C_1)$, y, sustituyendo en $p = y'$ e integrando, $y = \int p\ dx = \int (\phi(x, C_1)\ dx + C_2$ será la solución buscada. Veamos un ejemplo:

Resolver la ecuación $y'' = A\ \sqrt{1 + (y')^2}$. Hacemos el cambio $y' = p$ y la ecuación se convierte en $p' = A\ \sqrt{1 + p^2}$, de donde

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = A\ dx, \qquad \text{e, integrando,} \ \operatorname{arg\,sh} p = A\ x + C_1, \qquad \text{y} \qquad p = \operatorname{sh}(A\ x + C_1),$$

e, integrando de nuevo

$$y = \int \operatorname{sh}(A\ x + C_1)\ dx + C_2 = \frac{1}{A} \operatorname{ch}(A\ x + C_1) + C_2.$$

Ecuaciones diferenciales de segundo orden sin variable independiente. Son de la forma $F(y, y', y'')) = 0$. Se transforman en una de primer orden haciendo el cambio de variable $p = y'$, de donde sale

$$p' = y'', \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\ y' = p\ \frac{dp}{dy},$$

quedando la ecuación de primer orden $F(y,\ p,\ dp/dy) = 0$, que se resuelve, obteniendo $p = \phi(y, C_1)$, y, sustituyendo en $p = y'$,

$$\phi(y, C_1) = y', \quad dx = \int \frac{1}{\phi(y, C_1)}\ dy, \text{ e, integrando, } \int \frac{1}{\phi(y, C_1)}\ dy = x + C_2,$$

de donde se obtiene y en función de x, si se puede.

Veamos un ejemplo:

Resolver la ecuación $y'' + y = 0$. Hacemos el cambio $y' = p$, de donde se obtiene, como acabamos de ver, $y'' = p\ \frac{dp}{dy}$, y la ecuación se convierte en $p\ \frac{dp}{dy} + y = 0$, de donde

$$p\ dp = -y\ dy, \quad \text{e, integrando,} \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2}, \quad p = \sqrt{C_1 - y^2}, \text{ y } \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = dx$$

e, integrando de nuevo

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \int dx + C_2, \quad \text{y, usando la constante} \quad k = \sqrt{C_1},$$

$$\int \frac{dy}{k\sqrt{1 - \left(\frac{y}{k}\right)^2}} = dx + C_2, \quad \operatorname{arcsen} \frac{y}{k} = x + C_2, \quad \text{de donde} \quad y = k \operatorname{sen}(x + C_2).$$

8.4 Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\ y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\ y' + a_n(x)\ y = F(x).$$

La **ecuación diferencial lineal** se dice **homogénea** si $F(x) = 0$, y no homogénea si $F(x) \neq 0$. Si todas las funciones $a_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, son constantes (es decir, no dependen de x), entonces la **ecuación diferencial lineal** se dice que es **con coeficientes constantes**.

Una propiedad específica de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas es que: *Si f y g son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, entonces $\lambda\ f + \mu\ g$ también lo es.* Esta propiedad se comprueba sin más que derivar y sustituir en la ecuación.

Se puede demostrar (y es coherente con la propiedad de linealidad anterior y con lo que dijimos de que la solución general de una ecuación diferencial de orden n depende de n constantes arbitrarias) que, *si y_1, ..., y_n son soluciones independientes*[1] *de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, entonces la solución general de esta ecuación es de la forma* $c_1\ y_1 + ... + c_n\ y_n$, donde $c_1, ..., c_n$ son constantes arbitrarias.

Aquí nos limitaremos a estudiar las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, tanto homogéneas como no homogéneas. Comenzaremos con las

Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$y'' + 2\ a\ y' + b\ y = 0. \tag{8.1}$$

Para encontrar la solución general, probamos con una solución de la forma $y = A\ e^{rx}$. Sustituyendo en la ecuación, tenemos,

$$r^2\ A\ e^{rx} + 2\ a\ r\ A\ e^{rx} + b\ A\ e^{rx} = 0,$$

y, dividiendo por $A\ e^{rx}$, se obtiene la ecuación algebraica asociada

$$r^2 + 2\ a\ r + b = 0, \tag{8.2}$$

que tiene dos soluciones (reales o complejas) r_1 y r_2, y, de acuerdo con la propiedad enunciada hace poco, tenemos que la solución general de la ecuación diferencial (8.1) es $A\ e^{r_1 x} + B\ e^{r_2 x}$. Para dar una forma más detallada y convencional, distinguiremos varios casos:

(a) Si r_1 y r_2 son dos números reales y distintos, entonces la solución general es $y = A\ e^{r_1 x} + B\ e^{r_2 x}$.

(b) Si $r_1 = r_2$ es un número real, entonces solo hemos encontrado una solución, y no dos como buscábamos. Probamos entonces con una solución de la forma $x\ e^{r_1 x}$, y, sustituyendo en (8.1), y, teniendo en cuenta que si $r_1 = r_2$ es porque $4\ a^2 - 4\ b = 0$, y, entonces, $r_1 = -a$, obtenemos

$$r_1 e^{r_1 x} + r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} + 2a(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}) + b x e^{r_1 x} = e^{r_1 x}(2r_1 + 2a) + x e^{r_1 x}(r_1^2 + 2ar_1 + b) = 0,$$

por lo tanto, la solución general es de la forma $y = A\ e^{r_1 x} + B\ x\ e^{r_1 x}$.

(c) Si $r_1 \neq r_2$ son números complejos, entonces, por ser raíces de la misma ecuación de segundo grado, son de la forma $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, y podemos escribir

$$y = A\ e^{(\alpha + i\beta)x} + B\ e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(A\ e^{i\beta x} + B\ e^{-i\beta x}\right) \tag{8.3}$$

$$= e^{\alpha x}\left((A + B)\cos(\beta x) + i\ (A - B)\,\mathrm{sen}(\beta x)\right) = e^{\alpha x}\left(C\cos(\beta x) + i\ D\,\mathrm{sen}(\beta x)\right), \tag{8.4}$$

y, como y es una función compleja solución de (8.1), también son soluciones sus partes real e imaginaria, y, por lo tanto, cualquier combinación lineal de sus partes real e imaginaria. Luego la solución general de (8.1), cuando las soluciones de (8.2) son dos números complejos $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, es

$$y = e^{\alpha x}\ \left(C\cos(\beta x) +\ D\,\mathrm{sen}(\beta x)\right),$$

[1] Se dice que n funciones y_1, ..., y_n son independientes si la única posibilidad de tener $\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n = 0$ con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ es que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

siendo C y D constantes arbitrarias.

En muchas ocasiones, en atención a la interpretación física de las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales, se escribe la expresión $C\cos(\beta x)+ D\operatorname{sen}(\beta x)$ en la forma $A\ \operatorname{sen}(\beta x+\phi)$, que se comprueba es equivalente a la anterior al desarrollar $A\ \operatorname{sen}(\beta x+\phi) = A\ \operatorname{sen}(\beta x)\cos\phi+ A\ \cos(\beta x)\operatorname{sen}\phi = C\cos(\beta x) + D\operatorname{sen}(\beta x)$ si $A\operatorname{sen}\phi = C$ y $A\cos\phi = D$.

Veamos algunos ejemplos:

Para resolver la ecuación diferencial $y''+y'-2\ y = 0$, consideramos la ecuación algebraica asociada $r^2 + r - 2 = 0$ cuyas soluciones son -2 y 1, y, por lo tanto, su solución general es de la forma $y = A\ e^{-2x} + B\ e^x$.

Para resolver la ecuación diferencial $y'' + 4\ y' + 4\ y = 0$, consideramos la ecuación algebraica asociada $r^2 + 4\ r + 4 = 0$ que tiene una única solución -2, y, por lo tanto, su solución general es de la forma $y = (A\ x + B)\ e^{-2x}$.

Para resolver la ecuación diferencial $y'' + 2\ y' + 2\ y = 0$, consideramos la ecuación algebraica asociada $r^2 + 2\ r + 2 = 0$ cuyas soluciones son $-1 + i$ y $-1 - i$, y, por lo tanto, su solución general es de la forma $y = e^{-x}(A\ \cos x + B\ \operatorname{sen} x)$.

Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales con coeficientes constantes no homogéneas

$$y'' + 2\ a\ y' + b\ y = F(x). \tag{8.5}$$

El resultado básico que se usa para resolver estas ecuaciones es que *la solución general de la ecuación (8.5) es la suma de la solución general de la ecuación homogénea y_h asociada (8.1) y una solución particular y_p de (refEDLNH).* Por lo tanto, para encontrar todas las soluciones de (refEDLNH), hay que encontrar todas las soluciones de (8.1), cosa que ya hemos visto como se hace, y buscar una solución particular (es decir, concreta, basta con solo una solución) de (refEDLNH). Esta suele ser la parte difícil del problema, pero hay algunos casos en que hay reglas para encontrar esa solución particular. Vamos a ver esos casos con el

Método de los coeficientes indeterminados: trata de probar soluciones y_p de una forma determinada en la que aparecen constantes cuyo valor se determina por sustitución en la ecuación diferencial. Las reglas para probar funciones en unos pocos casos son:

Si $F(x) = P_n(x)e^{rx}(D\operatorname{sen}(kx) + E\cos(kx))$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n en x, se distinguen varios casos:

1. Si $r + i\ k$ no es solución de la ecuación algebraica asociada a (8.1), se prueba con la función $y_p = (A_n(x)\ \cos(kx) + B_n(x)\ \operatorname{sen}(kx))e^{rx}$, donde A_n y B_n son polinomios de grado n.

2. Si $r+i\ k$ es solución de la ecuación algebraica asociada a (8.1) y $2a(r+i\ k)+b \neq 0$ (es decir, $r+i\ k$ no es una solución doble), se prueba con la función $y_p = (A_n(x)\ \cos(kx)+ B_n(x)\ \operatorname{sen}(kx))\ x\ e^{rx}$, donde A_n y B_n son polinomios de grado n.

3. Si $r+i\ k$ es solución doble de la ecuación algebraica asociada a (8.1) (i.e. $2a(r+i\ k)+b = 0$, y entonces $k = 0$), se prueba con la función $y_p = A_n(x)\ x^2\ e^{rx}$, donde A_n es un polinomio de grado n.

Veamos algunos ejemplos:

$y'' - y' = 2\ \operatorname{sen} x$.

La ecuación algebraica asociada es $r^2 - r = 0$, cuyas soluciones son $r = 0$ y $r = 1$. Como i no es ninguna de estas soluciones, probamos como solución particular de la ecuación con $y_p = A\ \cos x + B\ \operatorname{sen} x$. Calculando y_p' e y_p'', sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, tenemos $-(A+B)\ \cos x + (A-B)\ \operatorname{sen} x = 2\ \operatorname{sen} x$, de donde resulta $A+B=0$ y $A-B=2$, y, de aquí, $A=1$, $B=-1$, por lo tanto, $y_p = \cos x - \operatorname{sen} x$, y la solución general de la ecuación anterior es

$$y = C\ e^x + D + \cos x - \operatorname{sen} x.$$

$y'' - 3\ y' + 2\ y = 5\ e^x$.

La ecuación algebraica asociada es $r^2 - 3\ r + 2 = 0$, cuyas soluciones son $r = 2$ y $r = 1$. Como 1 es una de estas dos soluciones, probamos como solución particular de la ecuación con $y_p = A\ x\ e^x$. Calculando y_p' e y_p'', sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, tenemos $-A\ e^x = 5\ e^x$, de donde resulta $A = -5$, por lo tanto, $y_p = -5\ e^{-x}x$, y la solución general de la ecuación anterior es

$$y = C\ e^{2x} + De^x - 5\ x\ e^{-x}.$$

$y'' - 6\ y' + 9\ y = e^{3x}$.

La ecuación algebraica asociada es $r^2 - 6\ r + 9 = 0$, que tiene solución única $r = 3$. Como 3 coincide con esta solución doble, probamos como solución particular de la ecuación con $y_p = A\ x^2\ e^{3x}$. Calculando y_p' e y_p'', sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, tenemos $2\ A\ e^{3x} = e^{3x}$, de donde resulta $A = 1/2$, por lo tanto, $y_p = (1/2)\ x^2 e^{3x}$, y la solución general de la ecuación anterior es

$$y = C\ \ x\ e^{3x} + De^{3x} + (1/2)\ x^2 e^{3x}.$$

$y'' - y' = 5\ e^x - \operatorname{sen}(2x)$.

La ecuación algebraica asociada es $r^2 - r = 0$, cuyas soluciones son $r = 0$ y $r = 1$. Por otra parte la función $F(x)$ es una mezcla de dos tipos vistos anteriormente, por lo que probaremos con una y_p que sea suma de las correspondientes a esos dos tipos. Por la parte de F de la forma e^x, como 1 es una de las dos soluciones de la ecuación algebraica asociada, probaremos con una función de la forma $A\ x\ e^x$. Por la parte de F que es de la forma $\operatorname{sen} 2x$, como $2i$ no es ninguna de las soluciones de la ecuación algebraica asociada, probaremos con una función de la forma $C\ \cos 2x + B\ \operatorname{sen} 2x$. Así es que probaremos con la función $y_p = A\ x\ e^x + C\ \cos 2x + B\ \operatorname{sen} 2x$. Calculando y_p' e y_p'', sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, tenemos $A\ e^x + (-4\ B + 2\ C)\ \operatorname{sen}(2x) + (-4\ C - 2\ B)\ \cos(2x) = 5\ e^x - \operatorname{sen}(2x)$, de donde resulta $A = 5$, $-4\ B + 2\ C = -1$, $-4\ C - 2\ B = 0$, y, de aquí, $A = 5$, $B = 1/5$ y $C = -1/10$, por lo tanto, $y_p = 5\ x\ e^x + (1/5)\ \cos 2x - (1/10)\ \operatorname{sen} 2x$, y la solución general de la ecuación anterior es

$$y = D\ e^x + F + 5\ x\ e^x + (1/5)\ \cos 2x - (1/10)\ \operatorname{sen} 2x.$$

Un método más general para la solución de (refEDLNH) es el llamado de variación de los parámetros, pero es también más complicado y no lo veremos en este curso.

8.5 Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Una solución numérica de una ecuación diferencial es una función definida sobre una cantidad discreta de valores de un intervalo lo suficientemente grande como para que la función definida sobre todo el intervalo por interpolación (u otro método) de la anterior se aproxime a la verdadera solución de la ecuación.

La primera consecuencia de esta definición es que una solución numérica es una (aproximación de una) solución concreta, no una general. Por lo tanto, para tener soluciones numéricas, habrá que tener condiciones iniciales o condiciones de contorno. Comencemos a describir los métodos usados para las ecuaciones diferenciales de primer orden, por orden de sencillez:

Método de Euler para las ecuaciones diferenciales de primer orden. Es el más antiguo y poco usado en la práctica, pero sirve de modelo para el más usual de Runge-Kutta que veremos después.

Consideramos el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{array}{c} y' = f(x,y), \\ y(a) = y_0 \end{array}\right\}, \tag{8.6}$$

y queremos encontrar una solución aproximada en el intervalo $[a,b]$. Para ello comenzamos dividiendo el intervalo $[a.b]$ en N subintervalos iguales de longitud (paso) $h = (b-a)/N$, de modo que tenemos

$$a = x_0 < x_1 = a + h < x_2 = a + 2\ h < ... < x_N = a + N\ h = b.$$

Para valores de h pequeños, la función $y(x)$, en el intervalo $[a, t_1]$ se puede aproximar bien por la función cuya gráfica es la recta tangente en a, $y(x) = y(a) + y'(a)\ (x-a) = y(a) + f(a, y_0)\ (x-a)$, donde hemos sustituido $y'(a)$ por la expresión que tiene en nuestro problema de valores iniciales. Por lo tanto, aproximadamente,

$$y_1 := y(x_1) \approx y(a) + f(a, y_0)\ h.$$

A partir de este valor aproximado de $y(x_1)$, podemos usar el mismo argumento para calcular el valor aproximado de $y(x_2)$:

$$y(x_2) \approx y(x_1) + f(x_1, y_1)\ h.$$

y así sucesivamente hasta

$$y(x_N) \approx y(x_{N-1}) + f(x_{N-1}, y_{N-1})\ h.$$

Y escribiremos todos los pasos a hacer así:

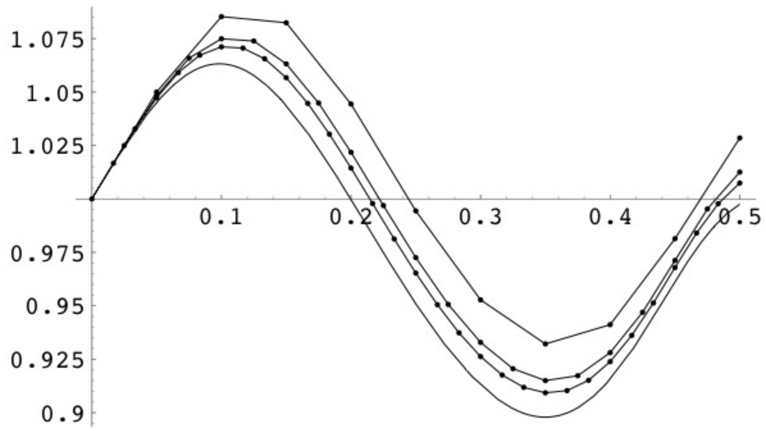
$$y_{n+1} := y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + f(x_n, y_n)\ h, \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{8.7}$$

Esta es la fórmula del método de Euler o método de la tangente, que aproxima la solución de (8.6) por (8.7).

La gráfica siguiente muestra un ejemplo de aplicación del método de Euler al problema de valores iniciales

$$y' = \cos(15\ x\ y), \quad y(0) = 1, \tag{8.8}$$

para valores de $h = 0'05, 0'0125$ comparados con la solución exacta:



Método de Heun para las ecuaciones diferenciales de primer orden. Una primera idea para mejorar la fórmula del método de Euler (8.7) sería cambiar $f(x_n, y_n)$ por la media de $f(x_n, y_n)$ y $f(x_{n+1}, y_{n+1})$, lo que daría lugar a la fórmula

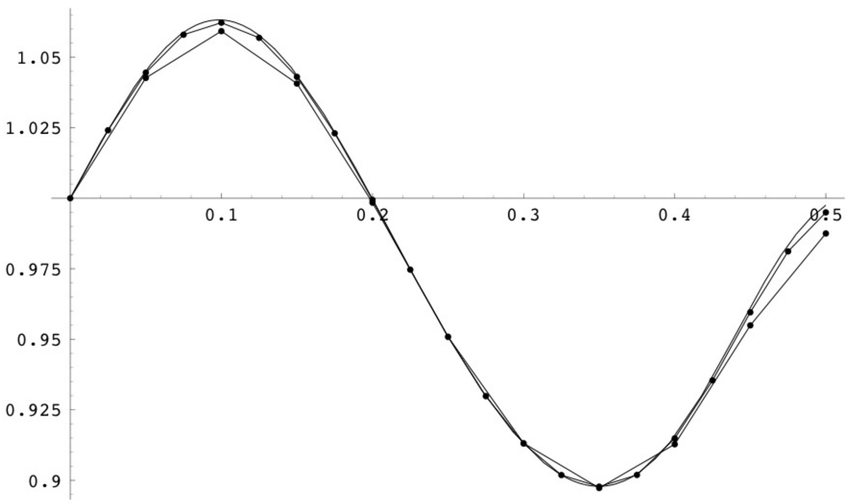
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))\ h,$$

que tiene el inconveniente de que y_{n+1} aparece en ambos miembros de la igualdad. Para evitar este problema podemos usar, en el miembro de la derecha, $y_n + hf(x_n, y_n)$ como una aproximación de y_{n+1}, lo que da lugar a la **fórmula del método de Heun**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)))\ h \tag{8.9}$$

para resolver el problema de valores iniciales (8.6). Este método es un ejemplo de método predictor-corrector: se usa el método de Euler para predecir un valor de y_{n+1}, y este valor se usa en (8.9) para obtener una aproximación mejor o más correcta.

La gráfica siguiente muestra un ejemplo de aplicación del método de Heun al mismo problema de valores iniciales anterior (8.8) para valores de $h = 0'05, 0'0125$ comparados con la solución exacta, observándose que la aproximación es mucho mejor que con el método de Euler:



Método de Runge-Kutta para las ecuaciones diferenciales de primer orden. Es una mejora de los anteriores que involucra una media ponderada de cuatro valores de $f(x, y)$ tomados en diferentes puntos del intervalo $[t_n.t_{n+1}]$. La fórmula de este método es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(a_{1n} + 2a2n + 2a2n + 2a2n)\ h \quad \text{donde} VI.5.4 \tag{8.10}$$

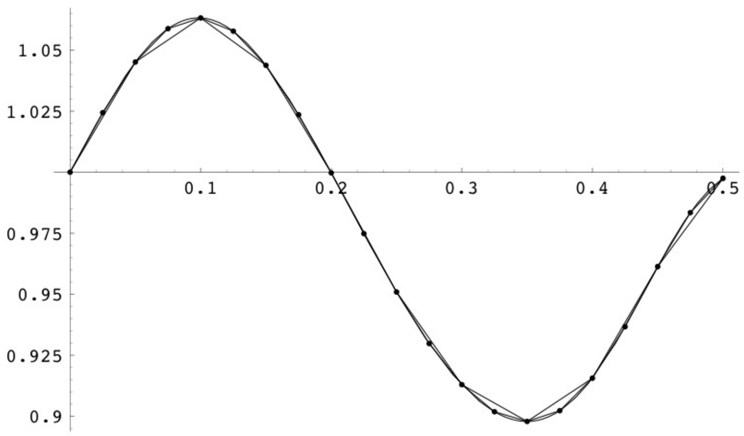
$$a_{1n} = f(x_n, y_n), \tag{8.11}$$

$$a_{2n} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}a_{1n}), \tag{8.12}$$

$$a_{3n} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}a_{2n}), \tag{8.13}$$

$$a_{4n} = f(x_n + h, y_n + h\ a_{3n}). \tag{8.14}$$

La gráfica siguiente muestra un ejemplo de aplicación del método de Runge-Kutta al mismo problema de valores iniciales anterior (8.8) para valores de $h = 0'05, 0'0125$ comparados con la solución exacta, observándose que la aproximación es mucho mejor que con los métodos anteriores:



Método del desarrollo en serie de Taylor. Uno de los métodos más efectivos para resolver ecuaciones diferenciales es suponer que la(s) solucion(es) de la ecuación se pueden expresar como una serie de potencias, es decir, que sus desarrollos de Taylor son una buena aproximación de la función. Eso lo usan con frecuencia los físicos en sus desarrollos teóricos (por ejemplo, en la deducción de la ecuación de ondas).

Veamos como resolver una ecuación de la forma $y'(x) = f(x, y(x))$, con la condición inicial $y(0) = 0$, usando el método del desarrollo de Taylor .

En primer lugar consideramos una aproximación $y(n, x)$ hasta el orden n de la función incógnita $y(x)$, es decir $y(n, x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. De la condición $y(0) = 0$ se deduce $a_0 = 0$.

A continuación , en la expresión $f(x, y(x))$, cambiamos $y(x)$ por su aproximación de orden n, $y(n, x)$, y hacemos el desarrollo de Taylor $g(n, x)$ de $f(x, y(n, x))$ alrededor de $x = 0$, hasta el orden $n - 1$.

Después igualamos la derivada $yp(n, x)$ de $y(n, x)$ (que será un polinomio de grado $n-1$) con $g(n, x)$ (que será otro polinomio de grado $n-1$) , lo que exige la igualdad de los coeficientes de los polinomios $yp(n, x)$ y $g(n, x)$, lo que da un sistema de ecuaciones cuya solución nos dará los coeficientes a_1, ... , a_n de la solución aproximada $y(n, x)$.

La solución $y(n, x)$ se aproximará rápidamente a la real si los coeficientes a_1, ... , a_n son pequeños (menores que 1) , mientras que la aproximación será lenta (habrá que tomar un valor grande de n para tener una buena aproximación) si a_1, ... , a_n son grandes . Además, en este caso, aún con n grandes $y(n, x)$ se aproximará a la solución real solo para pequeños valores de x .

Con Mathematica, todo los anterior se puede expresar de la siguiente manera

$y[n\_, x\_] := \sum_{i=0}^{nn} a[i]xx^i /.\{xx \to x, nn \to n\};$

$a[0] = 0;$

$yp[n\_, x\_] := \sum_{i=0}^{nn-1} (i+1)a[i+1]xx^i /.\{xx \to x, nn \to n\};$

$fs[n\_, x\_] := f[xx, y[nn, xx]]/.\{xx \to x, nn \to n\};$

$g[n\_, x\_, i\_] := D[fs[nn, xx], \{xx, ii\}]/.\{xx \to x, nn \to n, ii \to i\};$

$(*g[n\_, x\_] := \sum_{i=0}^{nn} \frac{1}{i!} g[n, 0, i]x^i *);$

$coef = Solve[Table[(i+1)a[i+1] == \frac{1}{i!}(g[n, x, i]/.x \to 0), \{i, 0, n-1\}], Table[a[i+1], \{i, 0, n-1\}]]$

Las soluciones de esta última ecuación dan los coeficientes que permiten conocer la solución aproximada $y[n, x]$.

Veamos dos ejemplos :

Ej.1) *Resolver aproximadamente, por el método de Taylor, la ecuación diferencial* $y'(x) = xy - \operatorname{sen} x$, $y(0) = 0$.

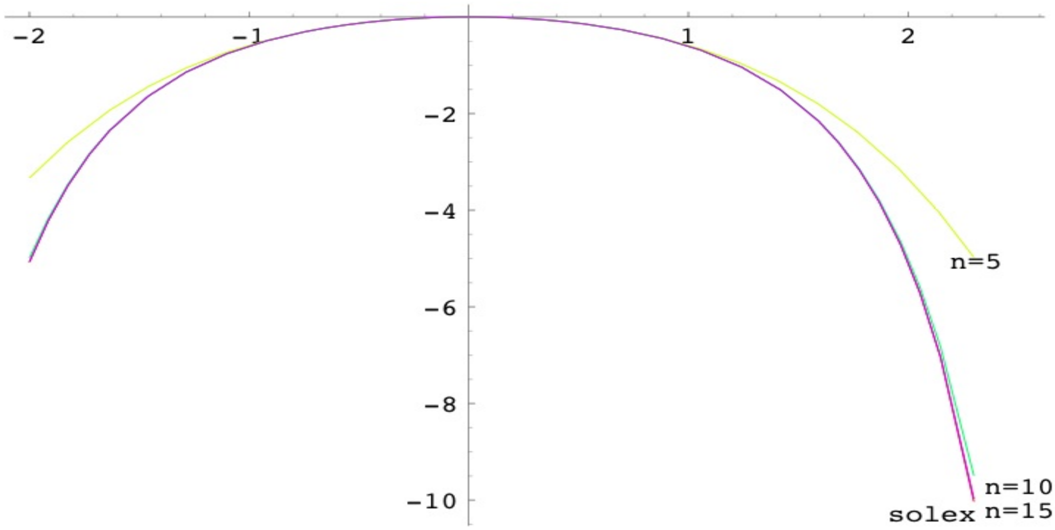
Aplicamos el método anterior usando la función $f(x, y) = xy - \operatorname{sen} x$. Con Mathematica, el trabajo se puede hacer como sigue:

In[]= $Clear["@"];$

$f[x\_, z\_] := xxzz - Sin[xx]/.\{xx \to x,\ zz \to z\}$

$y[n\_, x\_] := \sum_{i=0}^{nn} a[i]xx^i /.\{xx \to x, nn \to n\};$
$a[0] = 0;$
$yp[n\_, x\_] := \sum_{i=0}^{nn-1} (i+1)a[i+1]xx^i /.\{xx \to x, nn \to n\};$
$fs[n\_, x\_] := f[xx, y[nn, xx]]/.\{xx \to x, nn \to n\};$
$g[n\_, x\_, i\_] := D[fs[nn, xx], \{xx, ii\}]/.\{xx \to x, nn \to n, ii \to i\};$
$(*g[n\_, x\_] := \sum_{i=0}^{nn} \frac{1}{i!} g[n, 0, i]x^i *);$

$coef[n\_] := Solve[Table[(i+1)a[i+1] == \frac{1}{i!}(g[n, x, i]/.x \to 0), \{i, 0, n-1\}], Table[a[i+1], \{i, 0, n-1\}]]$
$coefic = Table[coef[n], \{n, 5, 15, 5\}]$
Out[]= $\{\{\{a[1] \to 0, a[2] \to -\frac{1}{2}, a[3] \to 0, a[4] \to -\frac{1}{12}, a[5] \to 0\}\}, \{\{a[1] \to 0, a[2] \to -\frac{1}{2}, a[3] \to 0, a[4] \to -\frac{1}{12}, a[5] \to 0, a[6] \to -\frac{11}{720}, a[7] \to 0, a[8] \to -\frac{19}{10080}, a[9] \to 0, a[10] \to -\frac{137}{725760}\}\}, \{\{a[1] \to 0, a[2] \to -\frac{1}{2}, a[3] \to 0, a[4] \to -\frac{1}{12}, a[5] \to 0, a[6] \to -\frac{11}{720}, a[7] \to 0, a[8] \to -\frac{19}{10080}, a[9] \to 0, a[10] \to -\frac{137}{725760}, a[11] \to 0, a[12] \to -\frac{3767}{239500800}, a[13] \to 0, a[14] \to -\frac{97943}{87178291200}, a[15] \to 0\}\}\}$
In[]= $asol[n\_, i\_] := coefic[[n/5]][[1]][[i]][[2]];$
$ysol[n\_, x\_] := \sum_{i=1}^{n} asol[n, i]\ x^i;$
Las soluciones aproximadas de órdenes 5, 10 y 15 respectivamente, son
In[]= $Table[ysol[n, x], n, 5, 15, 5]$
Out[]= $\{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}, -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{11\ x^6}{720} - \frac{19\ x^8}{10080} - \frac{137\ \ x^10}{725760}, -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{11\ x^6}{720} - \frac{19\ x^8}{10080} - \frac{137\ \ x^10}{725760} - \frac{3767\ x^12}{239500800} - 9\frac{7943\ x^14}{87178291200}\}$
Por otra parte, la solución exacta es
In[]= $solex = DSolve[\{w'[x] == f[x, w[x]], w[0] == 0\}, w, x]$
Out[]=
$\{\{w \to Function[\{x\}, -\frac{1}{2}\ E^{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{i}\ \ Erf\left[\frac{\mathrm{i}\ + x}{\sqrt{2}}\right]\ + 2\ Erfi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] - Erfi\left[\frac{1 + \mathrm{i}\ x}{\sqrt{2}}\right]\right)]\}\}$
Las siguientes gráficas comparan la solución exacta y las aproximadas de órdenes 5, 10 y 15
In[] = $Show[Graphics[\{Text["solex", \{2.11, solex[[1]][[1]][[2]][2.31]\}],$
$Text["n = 5", \{2.31, ysol[5, 2.31]\}],$
$Text["n = 10", \{2.51, ysol[10, 2.31]\}], Text["n = 15", \{2.51, ysol[15, 2.31]\}]\}],$
$Plot[\{solex[[1]][[1]][[2]][x], ysol[5, x], ysol[10, x], ysol[15, x]\},$
$\{x, -2, 2.3\}, PlotStyle \to \{\{Hue[0]\}, \{Hue[0.2]\}, \{Hue[0.4]\}, \{Hue[0.8]\}\},$
$PlotRange \to All, DisplayFunction \to Identity], PlotRange \to All, Axes \to True]$



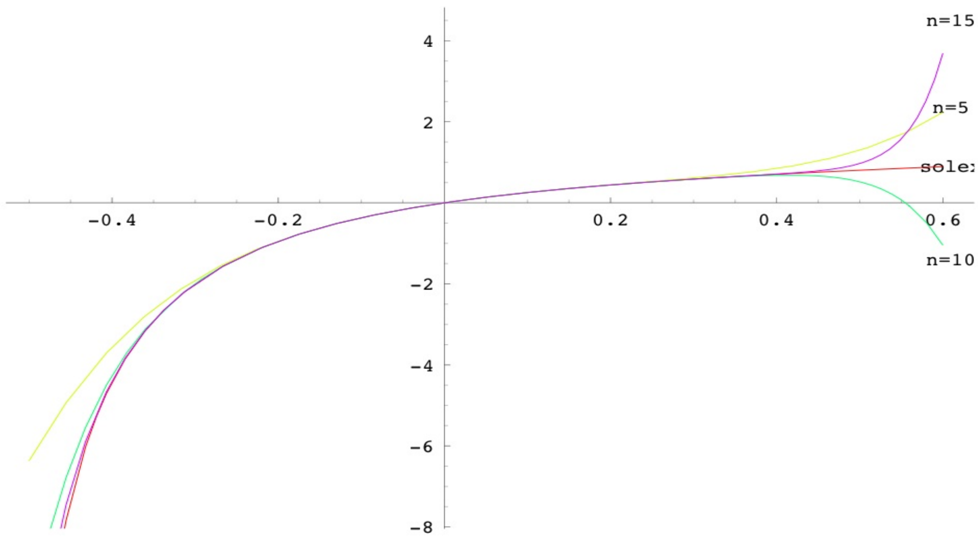
Ej.2) *Resolver aproximadamente, por el método de Taylor, la ecuación diferencial* $y'(x) = (y(x)-1)(y(x)-3)+x,\ y(0)=0.$

Aplicamos el método anterior usando la función $f(x,y) = (y-1)(y-3)+x$. Con Mathematica, siguiendo exactamente los mismos pasos que en el ejemplo anterior, llegamos a las siguientes soluciones aproximadas de ordenes 5,10 y 15:

In[] $= Table[ysol[n,x], n, 5, 15, 5]$

Out[] $= \{3\,x - \frac{11\ x^2}{2} + \frac{31\ x^3}{3} - \frac{223\ x^4}{12} + \frac{1999\ x^5}{60}, 3\,x - \frac{11\ x^2}{2} + \frac{31\ x^3}{3} - \frac{223\ x^4}{12} + \frac{1999\ x^5}{60} - \frac{10753\ x^6}{180} + \frac{21433\ x^7}{20} - \frac{276763\ x^8}{1440} + \frac{2233943\ x^9}{6480} - \frac{40070243\ x^{10}}{64800}, 3\,x - \frac{11\ x^2}{2} + \frac{31\ x^3}{3} - \frac{223\ x^4}{12} + \frac{1999\ x^5}{60} - \frac{10753\ x^6}{180} + \frac{21433\ x^7}{20} - \frac{276763\ x^8}{1440} + \frac{2233943\ x^9}{6480} - \frac{40070243\ x^{10}}{64800} + \frac{31624547\ x^{1}1}{28512} - \frac{8508740261\ x^{1}2}{4276800} + \frac{6012351937\ x^{1}3}{1684800} - \frac{4982371286309\ x^{1}4}{778377600} + \frac{67026581341609\ x^{1}5}{5837832000}\}$

Las siguientes gráficas comparan la solución exacta y las aproximadas de órdenes 5, 10 y 15



Ejercicios

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a)\ dy = 4xdx, \quad b)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 6x, \quad c)\ y^2 + (y')^2 = 1.$$

2. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{y'}{y} = 2$.

3. Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $xydy - \frac{(1+y^2)dx}{1+x^2} = 0$, y la solución particular que pasa por el punto $(1,3)$. (*Ayuda*: para resolver la integral $\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$, usar que $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$, donde a, b y c son constantes a determinar)

4. Encuentra la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes y la solución particular que pasa por el punto indicado.

$$a)\ \frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + 1 = 0, \quad (1,2); \quad b)\ x^2dy + y^2dx = 0, \quad (1,1);$$
$$c)\ s(1+r^2)ds + r(1+s^2)dr = 0, \quad (s=-2, r=2).$$

5. Encuentra la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes y la solución particular que pasa por el punto indicado.

$$a)\ xydy - \sqrt{1-y^2}dx = 0, \quad (1,0); \quad b)\ t\frac{dr}{dt} = r^2, \quad (1,1);$$
$$c)\ \frac{dy}{dx} - xy^2 + x = 0, \quad (1,1); \quad d)\ \sin(x)\cos(x)dx + \cos^2(x)dy = 0, \quad (1,2).$$

6. Resuelve la ecuación diferencial $(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$.

7. Resuelve las ecuaciones diferenciales

$$a)\ (x+y)y' = (x-y), \quad b)\ y' = \frac{xy - y^2}{x^2}, \quad c)\ t\cos(\frac{s}{t})\frac{ds}{dt} = s\cos(\frac{s}{t}).$$

8. Resuelve las ecuaciones diferenciales

$$y' = \frac{2y}{x}, \quad y' - \frac{2x}{1-x^2}y = x, \quad y' + \frac{2y}{x} = x^2, \quad y' - \frac{y}{x} = xy + x^3.$$

9. Resuelve las ecuaciones diferenciales:

$$a)\ x\frac{dy}{dx} + x = x^3, \quad b)\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4x = 0, \quad c)\ \frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0, \quad d)\ \frac{dy}{dx} + y\cos(x) = 0.$$

10. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones con coeficientes constantes

    (a) $y'' + 3\ y' + 2\ y = e^{-5x}$, (b) $y'' + 3\ y' - 10\ y = e^{-5x}$

    (c) $y'' + 4\ y' + 4\ y = e^{-2x}$ (d) $y'' + 3\ y' + 2\ y = x^2\ e^{-x}$

    (e) $y'' + 4\ y' + 4\ y = \cos(2x)$ (f) $y'' + 4\ y = \cos(2x)$

    (g) $y'' + 3\ y' + 2\ y = x^2$ (h) $y'' + 3\ y' + 2\ y = x^2\ e^x$

    (i) $y'' + 4\ y' + 2\ y = (\operatorname{sen} x)^2$ (j) $y'' + 6\ y' + 3\ y = x\ e^x \cos(2x)$

11. Usando los resultados del ejercicio anterior, resolver los siguientes problemas de valores iniciales

    (a) $\left.\begin{array}{c} y'' + 3\ y' + 2\ y = e^{-5x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right\}$, (b) $\left.\begin{array}{c} y'' + 3\ y' - 10\ y = e^{-5x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{array}\right\}$

    (c) $\left.\begin{array}{c} y'' + 4\ y' + 4\ y = e^{-2x} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right\}$ (d) $\left.\begin{array}{c} y'' + 3\ y' + 2\ y = x^2\ e^{-x} \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 2 \end{array}\right\}$

    (e) $\left.\begin{array}{c} y'' + 4\ y' + 4\ y = \cos(2x) \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right\}$ (f) $\left.\begin{array}{c} y'' + 4\ y = \cos(2x) \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 5 \end{array}\right\}$

    (g) $\left.\begin{array}{c} y'' + 3\ y' + 2\ y = x^2 \\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 2 \end{array}\right\}$ (h) $\left.\begin{array}{c} y'' + 3\ y' + 2\ y = x^2\ e^x \\ y(0) = 8, \quad y'(0) = 2 \end{array}\right\}$

    (i) $\left.\begin{array}{c} y'' + 4\ y' + 2\ y = (\operatorname{sen} x)^2 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1 \end{array}\right\}$ (j) $\left.\begin{array}{c} y'' + 6\ y' + 3\ y = x\ e^x \cos(2x) \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{array}\right\}$

12. Se demuestra en física que el desplazamiento $u(t)$ de su posición de equilibrio de un cuerpo de masa m cuelga de un muelle elástico con una constante de Hooke (también llamada constante de elasticidad) k, situada en un medio con una constante de rozamiento c y sometida a una fuerza $F(t)$ dependiente del tiempo que actúa en la misma dirección que la fuerza de la gravedad, satisface la ecuación diferencial

    $$m\ u''(t) + c\ u'(t) + k\ u(t) = F(t).$$

    Determinar el movimiento $u(t)$ de ese cuerpo en los siguientes casos:

    (a) Para movimientos libres ($F(t) = 0$) y sin rozamiento ($c = 0$). Calcular la amplitud, frecuencia angular, período y fase en función de la masa m, la constante k y las condiciones iniciales $u(0)$ y $u'(0)$.

    (b) Para movimientos libres ($F(t) = 0$) con rozamiento ($c \neq 0$). Distinguir los casos

    (b1) $c^2 - 4mk > 0$ (rozamiento excesivo)

    (b2) $c^2 - 4mk = 0$ (rozamiento crítico)

    (b3) $c^2 - 4mk < 0$ (rozamiento suave)

    (c) Para movimientos forzados ($F(t) \neq 0$) sin rozamiento ($c = 0$) en los que $F(t) = F_0 \cos(\omega t - \alpha)$. Distinguir los casos

    (c1) $\omega \neq \sqrt{k/m}$ (sin resonancia)

    (c2) $\omega = \sqrt{k/m}$ (con resonancia).

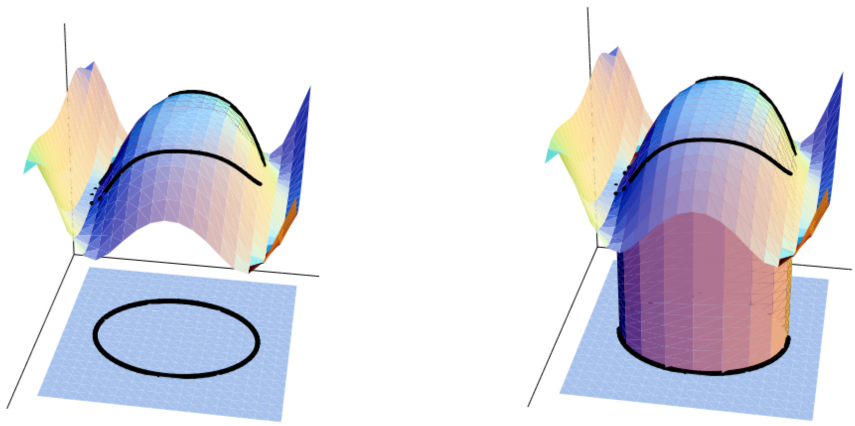
    Nota: Situaciones muy semejantes ocurren con los circuitos eléctricos y con el sonido.

Capítulo 9

Integración de funciones de varias variables

9.1 Definición de integral de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$.

Comencemos considerando el caso de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$. Sea D un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ (es decir, existe un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$ que contiene a D, $D \subset [a, b] \times [c, d]$. De modo análogo a como la integral de una función, entre α y β, de una variable es el área (con signo) de la región limitada por la gráfica de la función, el eje x y las rectas verticales $x = \alpha$, $x = \beta$, ahora *la integral de f en D es el volumen con signo (el signo de f) de la región del espacio limitada por la gráfica de f, el plano xy y las rectas verticales que pasan por la frontera de D.* Un ejemplo se muestra en el siguiente dibujo:



De modo análogo a lo que hicimos para integrales de una variable, ese volumen con signo se define como límite de sumas de volúmenes (con signo) de paralelepípedos tales que la unión de sus bases aproxima D, la unión de los paralelepípedos aproxima la región del espacio limitada por la gráfica de f, el plano xy y las rectas verticales que pasan por la frontera de D, y las áreas de cada una de las bases tienden a 0 cuando tomamos el límite. Vamos a realizar este proceso poco a poco.

Comenzamos considerando un rectángulo $[a,b]\times[c,d]$ que contenga al dominio D. A continuación dividimos cada intervalo en N partes (lo que da lugar a una división del rectángulo en N^2 partes), así

$$x_1 = a,\ x_2 = x_1+\frac{b-a}{N} = a+\frac{b-a}{N},\ \ldots,\ x_m = x_{m-1}+\frac{b-a}{N} = a+(m-1)\frac{b-a}{N},\ \ldots,\ x_{N+1} = b,$$

$$y_1 = c,\ y_2 = y_1+\frac{d-c}{N} = c+\frac{d-c}{N},\ \ldots,\ y_m = y_{m-1}+\frac{d-c}{N} = c+(m-1)\frac{d-c}{N},\ \ldots,\ y_{N+1} = d,$$

entonces, el volumen con signo del paralelepípedo cuya base tiene el punto (x_i, y_j) como vértice con menor valor de las coordenadas x e y, y que tiene un vértice superior en el punto de la gráfica de la función que está en la vertical de (x_i, y_j) es

$$f(x_i, y_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j). \tag{9.1}$$

Como queremos calcular la integral sobre D, sólo nos interesan los volúmenes de estos paralelepípedos en los que $(x_i, y_j) \in D$, por ello, multiplicaremos (9.1) por la *función característica de D*

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{if} \quad (x,y) \notin D \end{cases},$$

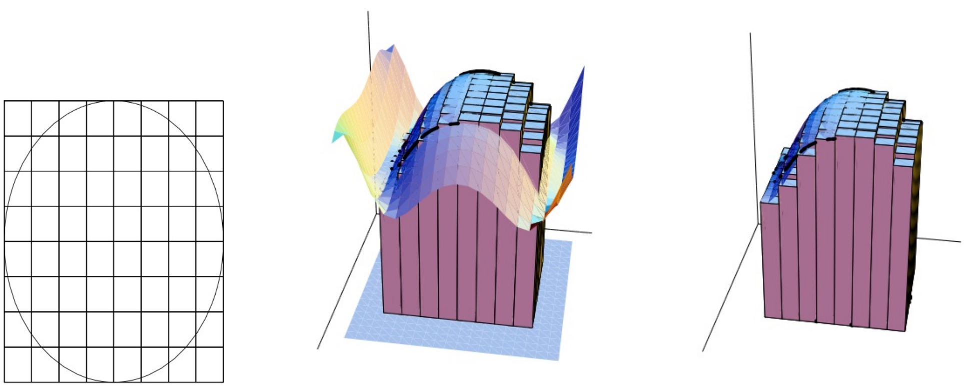
eliminando así las contribuciones al volumen de paralelepípedos que tengan la base fuera del domino D. *Definiremos* entonces *la integral de f sobre D por*

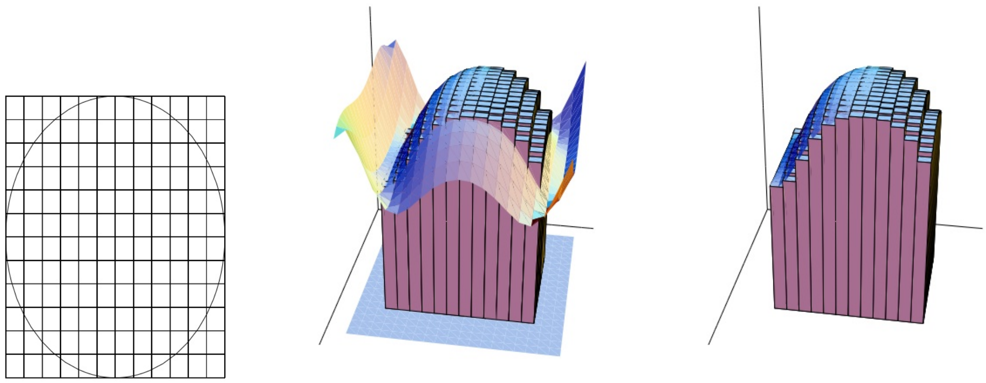
$$\begin{aligned} \int_D f(x,y)\ dxdy &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i,j=1}^{N} f(x_i, y_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)\chi_D(x_i, y_j) &(9.2)\\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i,j=1}^{N} f(x_i, y_j)\ \frac{b-a}{N}\ \frac{d-c}{N}\ \chi_D(x_i, y_j), &(9.3) \end{aligned}$$

cuando este límite existe. Si existe este límite (o, lo que es lo mismo, si existe esta integral) se dice que *la función f es integrable sobre el dominio D.*

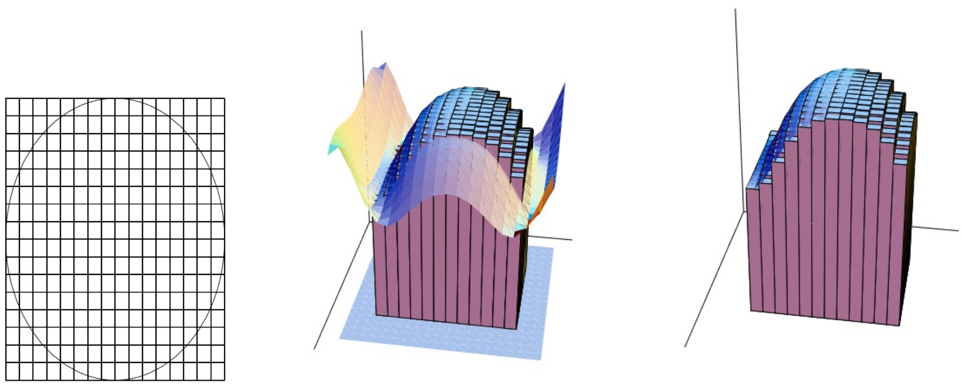
Los dibujos a continuación muestran como los paralelepípedos que acabamos de definir aproximan el volumen delimitado por una función f sobre un rectángulo que contiene al dominio D, para valores de $N = 8, 12, 16$.

N=8





N=12



N=16

La integral de una función de varias variables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un dominio acotado $D \subset \mathbb{R}^n$ se define de modo absolutamente semejante, Comenzamos considerando un n-cuboide $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ que contenga al dominio D. A continuación dividimos cada intervalo $[a_i, b_i]$ en N partes (lo que da lugar a una división del cuboide en N^n partes), así

$$x_{i1} = a_i,\ x_{i2} = x_{i1} + \frac{b_i - a_i}{N} = a_i + \frac{b_i - a_i}{N},\ ...$$
$$...,\ x_{im} = x_{i\ m-1} + \frac{b_i - a_i}{N} = a_i + (m-1)\frac{b_i - a_i}{N},\ ...,\ x_{i\ N+1} = b_i, \quad (9.4)$$

entonces, el hipervolumen con signo del $(n{+}1)$-cuboide cuya base tiene el punto $(x_{1j_1}, \ldots, x_{nj_n})$ como vértice con menor valor de las coordenadas $x_1, ..., x_n$, y que tiene un vértice superior en el punto de la gráfica de la función $(x_{1j_1}, \ldots, x_{nj_n}, f(x_{1j_1}, \ldots, x_{nj_n}))$ es

$$f(x_{1j_1}, \ldots, x_{nj_n})(x_{1j_1+1} - x_{1j_1}) \ldots (x_{nj_n+1} - x_{nj_n}) = f(x_{1j_1}, \ldots, x_{nj_n})\frac{(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)}{N^n}.$$

Como en el caso de dimensión 2, la integral de f sobre D se define por

$$\int_D f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{N} f(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n})\frac{(b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)}{N^n}\chi_D(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n}), \quad (9.5)$$

cuando este límite existe. Si existe este límite (o, lo que es lo mismo, si existe esta integral) se dice que *la función f es integrable sobre el dominio D*.

En (9.5), $\chi(D)$ es, de nuevo, la *función característica de D*, que, como la anterior, se define por

$$\chi_D(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (x_1,...,x_n)\in D \\ 0 & \text{if} \quad (x_1,...,x_n)\notin D \end{cases}.$$

Un resultado importante que permite asegurar que hay muchas funciones integrables es: *Toda función $f : D\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua sobre un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ es integrable sobre D.*

9.2 Cálculo de integrales dobles y triples, regla de Fubini.

Las integrales múltiples pueden calcularse realizando integrales sucesivas de una sola variable mediante la aplicación del

Teorema de Fubini *Si f es una función integrable sobre un dominio D de la forma $D = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, entonces*

$$\int_D f(x_1,...,x_n)dx_1\ldots dx_n$$
$$= \int_{a_1}^{b_1}\cdots\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,...,x_n)dx_n\right)dx_{n-1}\right)\ldots dx_1, \quad (9.6)$$

donde el orden en que se realiza la integración es indiferente.

Esta fórmula resulta muy natural si miramos con cuidado la fórmula (9.5) que define la integral. En efecto, si escribimos la fórmula (9.5) ordenando las sumas, de modo que hacemos primero las que corresponden a la variable x_n, después las que corresponden al la variable x_{n-1}, y así sucesivamente hasta la variable x_1, obtenemos, teniendo en cuenta que, al ser el dominio D un cuboide, $\chi_D(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n}) = 1$ en todos los puntos que aparecen en las sumas de (9.5),

$$\int_D f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{j_1=1}^{N}\cdots\left(\sum_{j_{n-1}=1}^{N}\left(\sum_{j_n=1}^{N} f(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n})\frac{(b_n-a_n)}{N}\right)\frac{(b_{n-1}-a_{n-1})}{N}\right)\cdots\frac{(b_1-a_1)}{N}, \quad (9.7)$$

y cada una de estas sumas tiende a la correspondiente integral en la fórmula de Fubini cuando N tiende a infinito.

Como ejemplo de aplicación de esta fórmula, vamos a calcular la integral de la función $f(x,y) = 10 - x^2 - 3xy$ sobre el dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 2 \leq y \leq 3\}$. Observemos primero que $D = [0,1] \times [2,3]$, por lo tanto

$$\int_D (10 - x^2 - 3xy)\ dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_2^3 (10 - x^2 - 3xy) dy \right) dx \tag{9.8}$$

$$= \int_0^1 \left[10y - x^2 y - 3x\frac{y^2}{2} \right]_2^3 dx \tag{9.9}$$

$$= \int_0^1 \left(30 - 3\ x^2 - 3x\frac{9}{2} - 20 + 2x^2 + 6x \right) dx \tag{9.10}$$

$$= \int_0^1 \left(10 -\ x^2 - \frac{15}{2}x \right) dx = \left[10x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{4}x^2 \right]_0^1 = \frac{71}{12} \tag{9.11}$$

También hay una fórmula de Fubini válida para dominios algo más complicados

Fórmula de Fubini II *Sean $g_i(x_1, ..., x_{i-1})$, $h_i(x_1, ..., x_{i-1})$, $2 \leq i \leq n$ funciones reales, y sea D el dominio de $\mathbb{R}^n$ definido por $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1 \leq x \leq b_1, g_2(x_1) \leq h_2(x_1), \ldots, g_n(x_1, ..., x_{n-1}) \leq x_n h_n(x_1, ..., x_{n-1})\}$. Si f es una función integrable sobre D,*

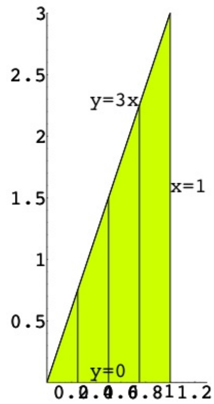
$$\int_D f(x_1, ..., x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{g_2(x_1)}^{h_2(x_1)} \cdots \left(\int_{g_{n-1}(x_1,...,x_{n-2})}^{h_{n-1}(x_1,...,x_{n-2})} \left(\int_{g_n(x_1,...,x_{n-1})}^{h_n(x_1,...,x_{n-1})} f(x_1, ..., x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \right) \ldots dx_2 \right) dx_1.$$

En esta fórmula si que es importante hacer las integrales por orden: primero respecto de la variable cuyos límites de integración dependen de las demás variables.

Veamos unos ejemplos:

E1. *Calcular la integral de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el dominio D del plano limitado por las rectas $y = 3x$, $x = 1$ y el eje x.*



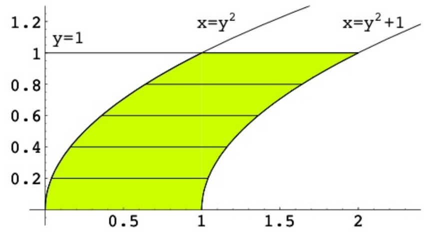
El eje x es la recta $y = 0$. Así, x varía entre $x = 0$ (que es el valor de x en el punto intersección de la recta $y = 3x$ con la recta $y = 0$) y 1 (pues $x = 1$ es una de las rectas que limitan el dominio). Por otro lado y variará entre el valor que tome en $y = o$, que es 0, y el valor que toma en $y = 3x$, que es $3x$, por lo tanto (ver dibujo adjunto) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3x\}$. Aplicando la fórmula de Fubini II, tenemos

$$\int_D (x^2 + y^2)\ dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_0^{3x} (x^2 + y^2)\ dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{3x} dx = \int_0^1 (3x^3 + 9x^3) dx = \left[\frac{3x^4}{4} + \frac{9x^4}{4} \right]_0^1 = 3.$$

E2. *Calcular la integral de la función $f(x,y) = x + y$ sobre el dominio D del plano limitado por las rectas $y = 0$, $y = 1$ y las curvas $x = y^2$, $x = y^2 + 1$.*

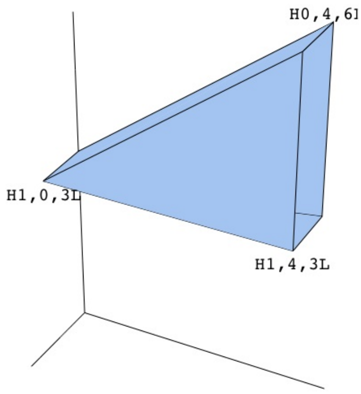
Por estar el dominio acotado por las rectas $y = 0$, $y = 1$, parece claro que, en el dominio D, y varia entre 0 y 1, y, por estar entre las curvas $x = y^2$ y $x = y^2 + 1$, x varía entre y^2 e $y^2 + 1$. Por lo tanto (ver dibujo adjunto) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq x \leq y^2 + 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Aplicamos ahora la fórmula de Fubini II, teniendo en cuenta que, en este dominio, es la variable x la que tiene unos límites que dependen respecto de la otra variable y, por lo tanto, la primera integral la haremos respecto de x:



$$\int_D (x+y)\ dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^2+1} (x+y)\ dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_{y^2}^{y^2+1} dy = \int_0^1 (y^2 + \frac{1}{2} + y) dy = \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

E3. *Calcular la integral de la función $f(x,y,z) = xz$ sobre el dominio D del espacio de la figura adjunta.*



Al ver la figura se observa que el dominio D está limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 3$, y el plano inclinado con respecto a los ejes y y z y paralelo al eje x cuya intersección con el plano (y,z) pasa por los puntos $(0,0,3)$ y $(0,4,6)$, es decir, el plano de ecuación $z = 3 + \frac{3}{4}y$. Por lo tanto D es el dominio definido por $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4, 3 \leq z \leq 3 + \frac{3}{4}y\}$. Aplicamos ahora la fórmula de Fubini II, y obtenemos :

$$\int_D x\ z\ dx\ dy\ dz = \int_0^1 \left(\int_0^4 \left(\int_3^{3+\frac{3}{4}y} xz\ dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^4 \left[x\frac{z^2}{2} \right]_3^{3+\frac{3}{4}y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^4 \left(\frac{9}{4}xy + \frac{9}{32}xy^2 \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{9}{8}xy^2 + \frac{3}{32}xy^3 \right]_0^4 dx = \int_0^1 (18x + 6x) dx = \left[12x^2 \right]_0^1 = 12.$$

9.3 Cambio de coordenadas. Cálculo de integrales en coordenadas polares, esféricas y cilíndricas.

Muchas integrales sobre un dominio D tienen un cálculo más sencillo cuando usamos coordenadas (variables) que se adaptan mejor a la forma del dominio. Esta es una de las razones que hace conveniente el estudiar como cambia una integral múltiple cuando cambiamos de variable. No vamos a deducir la fórmula, pero si a ver que es una razonable generalización de la fórmula del cambio de variable en una integral simple. Recordemos como era esta:

Sea $f(x)$ una función de una variable real. Si hacemos un cambio de variable $x = \varphi(u)$, tenemos $dx = \varphi'(u)du$ y, cuando $x = a$ (resp. $x = b$), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(x(u))\varphi'(u)du. \tag{9.12}$$

$$\begin{tikzcd} \underset{x=\varphi(u)}{\mathbb{R}} \arrow[r, "f"] & \underset{f(x)=f(\varphi(u))}{\mathbb{R}} \\ \underset{u}{\mathbb{R}} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} \underset{(x_1,...,x_n)=\varphi(u_1,...,u_n)}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "f"] & \underset{f(x_1,...,x_n)=f(\varphi(u_1,...,u_n))}{\mathbb{R}} \\ \underset{(u_1,...,u_n)}{\mathbb{R}^n} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Cuando se trata de hacer la integral, sobre un dominio D, de una función de varias variables $f(x_1, ..., x_n)$, si hacemos un cambio de variable $(x_1, ..., x_n) = \varphi(u_1, ..., u_n)$, así como el *elemento de línea* dx de la integral de una variable se transformaba, al hacer el cambio de variable, de acuerdo con la regla $dx = |\varphi'(u)|\ du$, el *elemento de volumen* $dx_1...dx_n$ de una integral múltiple se transforma, al hacer el cambio de variable, de acuerdo con la regla $dx_1...dx_n = |\det(d\varphi(u-1, ..., u_n))|\ du_1...du_n$.

Por otro lado, igual que en en la fórmula (9.12), al hacer el cambio de variable se cambian los límites de integración tomando su imagen por φ^{-1} (la aplicación inversa del cambio de variable), en la integral múltiple, al hacer un cambio de variable por la aplicación φ, hay que integrar (respecto de las nuevas variables) sobre el dominio $\varphi^{-1}(D)$. La fórmula del cambio de variable para la integral múltiple es, por tanto,

Cambio de variable *Si* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función integrable sobre un dominio* D *y* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función diferenciable, con inversa diferenciable,*

$$\int_D f(x_1, ..., x_n)\ dx_1\ ...\ dx_n = \int_{\varphi^{-1}(D)} f(\varphi(u_1, \ldots, u_n))\ |\det(d\varphi(u))|\ du_1\ ...\ du_n.$$

Antes de seguir adelante, vamos a dar una explicación de los nombres *elemento de línea* y *elemento de volumen* usados antes, que ayuden a entender de algún modo el por qué de la fórmula de cambio de variable en las integrales múltiples.

Recordemos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i$, donde Δx_i es la longitud del segmento de intervalo entre x_i y x_{i+1}. Se puede entender formalmente que la expresión Δx_i se convierte en dx cuando $\Delta x_i \to 0$, de modo que dx sería como una longitud infinitesimal de un segmento infinitesimal. Esto es lo que llamamos elemento de línea. Entendida así la diferencial de x, si tengo una función $x = \varphi(u)$, una variación Δu de u se transformará en una variación $\Delta x = \varphi(u + \Delta u) - \varphi(u)$ de x. Cuando $\Delta u \to 0$, $\displaystyle dx \sim \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\varphi(u + \Delta u) - \varphi(u)}{\Delta u}\Delta u \sim \varphi'(u)\ du$.

Si aplicamos ahora el mismo tipo de "razonamiento formal" a una función de varias variables, tenemos que, en primer lugar,

$$\int_D f(x_1,...,x_n)\ dx_1 \dots dx_n = \lim_{\Delta x_{ji}\to 0} \sum f(x_{1i},...,x_{ni})\Delta x_{1i}\dots\Delta x_{ni}\chi_D((x_{1i},...,x_{ni}),$$

donde $\Delta x_{1i}\dots\Delta x_{ni}$ es el n-volumen del n-cuboide de lados $\Delta x_{1i}, \dots, \Delta x_{ni}$. Tomando ahora límites como antes, $\Delta x_{1i}\dots\Delta x_{ni}$ se transforma en un volumen infinitesimal $dx_1\dots dx_n$, que es lo que llamamos elemento de volumen. Si tengo ahora una función $x = (x_1,...,x_n) = \varphi(u_1,...,u_n)$, ¿cómo se transformará el elemento de volumen $du_1\dots du_n$ por la función φ?. Vamos a hacer un "cálculo" para $n = 3$. Observemos primero que, aunque el cuboide infinitesimal de lados du_1, du_2, du_3 correspondiente a las coordenadas u sea de lados ortogonales y de módulo unidad, al aplicar la función φ, las nuevas coordenadas x_1, x_2, x_3 no tienen por qué dar un cuboide infinitesimal de lados ortogonales. Luego, para calcular su volumen, no usaremos simplemente su producto sin más, sino que lo calcularemos usando la fórmula que da el volumen de un paralelepípedo generado por tres vectores a, b, c por el módulo del producto mixto $|\langle a\wedge b, c\rangle| = \det(a, b, c)$. Así, el elemento de volumen $dx_1\ dx_2\ dx_3$ del paralelepípedo infinitesimal de lados dx_1, dx_2, dx_3 lo calcularemos aplicando la fórmula $dx_1\ dx_2\ dx_3 = \det(dx_1\ dx_2\ dx_3)$. Para calcular ese determinante hemos de calcular las componentes de dx_1, dx_2, dx_3 en una base ortonormal orientada. Como suponemos que los du_1, du_2, du_3 sí que son ortogonales y unitarios, podemos usarlos como una tal base. Como los dx_j y du_j son infinitesimales, dx_j estará bien aproximada por el desarrollo de Taylor hasta el primer orden, así:

$$dx_j \sim \lim_{\Delta u_k\to 0} x_j(u_1+\Delta u_1, u_2+\Delta u_2, u_3+\Delta u_3) - x_j(u_1,u_2,u_3)$$

$$= \lim_{\Delta u_k\to 0}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_1}(u_1,u_2,u_3)\Delta u_1 + \frac{\partial x_j}{\partial u_2}(u_1,u_2,u_3)\Delta u_2 + \frac{\partial x_j}{\partial u_3}(u_1,u_2,u_3)\Delta u_3\right)$$

$\sim \dfrac{\partial x_j}{\partial u_1}(u_1,u_2,u_3)du_1 + \dfrac{\partial x_j}{\partial u_2}(u_1,u_2,u_3)du_2 + \dfrac{\partial x_j}{\partial u_3}(u_1,u_2,u_3)du_3$, de donde resulta

$$dx_1\ dx_2\ dx_3 = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} du_1\ du_2\ du_3.$$

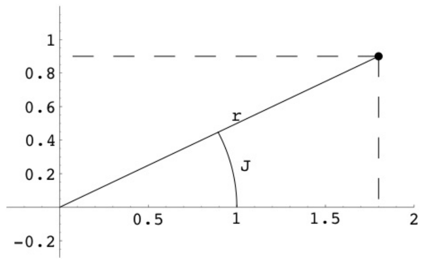
Vamos a ver ahora algunos cambios de variable que corresponden a coordenadas de uso muy frecuente:

Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$. Son aquellas coordenadas (r, θ) que designan cada punto del plano por su distancia al origen y el ángulo que, la recta que pasa por el origen y ese punto forma con el eje de las x. Es decir, las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto cuyas coordenadas polares son (r, θ) vienen dadas por

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\ \cos\theta \\ y &=& r\ \operatorname{sen}\theta \end{array}, \quad \text{de donde se deduce que} \quad \begin{array}{rcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &=& \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}.$$

Este cambio de variable viene ilustrado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\\ (x,y)=(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)\end{array} \arrow[r, "f"] & \begin{array}{c}\mathbb{R}\\ f(x,y)=f(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\\ (r,\theta)\end{array} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f\circ\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$



El determinante de la diferencial de la función cambio de variable es, en este caso,

$$\det(d\varphi(r,\theta)) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r.$$

Veamos un ejemplo de uso de estas coordenadas para hacer una integral doble:

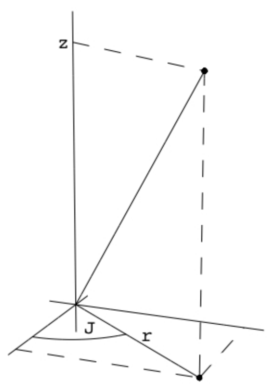
E4. Calcular la integral de la función $f(x,y) = x^2+y^2$ sobre el dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 2\}$.

Observemos que $f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = r^2$ y que $\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta);\ x(r,\theta)^2 + y(r,\theta)^2 \leq 2\} = \{(r,\theta);\ r^2 \leq 2\} = \{(r,\theta);\ r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, por lo tanto

$$\int_D (x^2+y^2)\ dx\ dy = \int_{\varphi^{-1}(D)} r^2\ r\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\ r\ dr\ d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\ \pi.$$

Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$. Son aquellas coordenadas (r,θ,z) que designan cada punto del espacio por las coordenadas polares de su proyección sobre el plano xy y su coordenada cartesiana z. Es decir, las coordenadas cartesianas (x,y,z) de un punto cuyas coordenadas cilíndricas son (r,θ,z) vienen dadas por

$$\begin{array}{lll} x &=& r\ \cos\theta \\ y &=& r\ \operatorname{sen}\theta, \text{ de donde se deduce que} \\ z &=& z \end{array} \qquad \begin{array}{lll} r &=& \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &=& \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z &=& z \end{array}$$



Este cambio de variable viene ilustrado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\begin{array}{c}\mathbb{R}^3\\ (x,y,z)\\ =(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta, z)\end{array} \arrow[r, "f"] & \begin{array}{c}\mathbb{R}\\ f(x,y,z)\\ =f(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta, z)\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathbb{R}^3\\ (r,\theta,z)\end{array} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f\circ\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

El determinante de la diferencial de la función cambio de variable es, en este caso,

$$\det(d\varphi(r,\theta,z)) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Veamos un ejemplo en que es cómodo usar estas coordenadas:

E5. Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$ *sobre el dominio* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Observemos que $f(x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z)) = r^2\, z$ y que $\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta,z);\ x(r,\theta)^2 + y(r,\theta)^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\} = \{(r,\theta,z);\ r^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\} = \{(r,\theta,z);\ r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1\}$, por lo tanto

$$\int_D (x^2 + y^2)\ z\ dx\ dy\ dz = \int_{\varphi^{-1}(D)} z\ r^2\ r\ dr\ d\theta\ dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 r^2\ r\ z\ dz\ dr\ d\theta$$

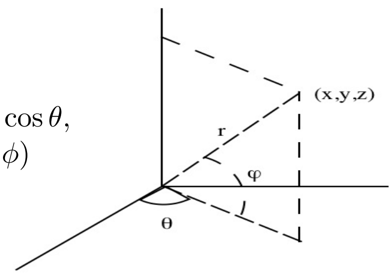
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\ \pi.$$

Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$. Son aquellas coordenadas (r, θ, ϕ) que designan cada punto del espacio por las coordenadas polares (r, θ) de su proyección sobre el plano xy y el ángulo ϕ que el segmento que une el origen con el punto con el segmento que une el origen con la proyección del punto sobre el plano xy. Es decir, las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto cuyas coordenadas esféricas son (r, θ, ϕ) vienen dadas por

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\phi\ \cos\theta, \\ y &= r\cos\phi\ \operatorname{sen}\theta, \\ z &= r\ \operatorname{sen}\phi \end{aligned} \quad \text{de donde se deduce que} \quad \begin{array}{rcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &=& \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \phi &=& \operatorname{arcsen}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}.$$

Este cambio de variable viene ilustrado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c}\mathbb{R}^3\\ (x,y,z) = (r\cos\phi\cos\theta,\\ r\cos\phi\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\phi)\end{array} \arrow[r, "f"] & \begin{array}{c}\mathbb{R}\\ f(x,y,z) = f(r\cos\phi\cos\theta,\\ r\cos\phi\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\phi)\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\phi)\end{array} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$



El determinante de la diferencial de la función cambio de variable es, en este caso:

$$\det d\varphi_{(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi\ \cos\theta & -r\cos\phi\ \operatorname{sen}\theta & -r\ \operatorname{sen}\phi\ \cos\theta \\ \cos\phi\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\phi\ \cos\theta & -r\operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi & 0 & r\cos\phi \end{vmatrix} = -r^2\cos\phi.$$

Veamos un ejemplo en que es cómodo usar estas coordenadas:

E6. Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = x + 1$ *sobre el dominio* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Observemos que $f(x(r,\theta,\phi), y(r,\theta,\phi), z(r,\theta,\phi)) = 1 + r\cos\phi\cos\theta$ y que $\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta,\phi);\ x(r,\theta,\phi)^2 + y(r,\theta,\phi)^2 \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = \{(r,\theta,\phi);\ r^2 \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = \{(r,\theta,z);\ r \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, por lo tanto

$$\int_D (1 + x)\ dx\ dy\ dz = \int_{\varphi^{-1}(D)} (1 +\ r\cos\phi\cos\theta)\ r^2\cos\phi\ dr\ d\theta\ d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (r^2 \cos\phi + \ r^3 \cos^2\phi \cos\theta) \ dr \right) \ d\phi \right) \ d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \cos\phi + \frac{1}{4} \cos^2\phi \cos\theta \right) d\phi \right) \ d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \operatorname{sen}\phi + \frac{1}{8} \left(\phi + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\phi) \right) \cos\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} 2 + \frac{1}{8} (\pi + 0) \cos\theta \right) \ d\theta = \left[\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8} \operatorname{sen} {}^{\underline{o}}theta \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}.$$

9.4 Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes.

Si D es un dominio del plano $\mathbb{R}^2$, el volumen de un cilindro de base D y altura 1 se puede calcular usando dos procedimientos:
1) Aplicando la fórmula volumen = área de la base por la altura, lo que da

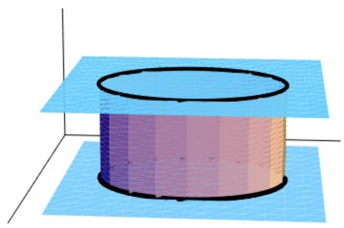
$$Volume(\text{cilindro}) = \text{Area}(D) \times 1 = \text{Area}(D), \tag{9.13}$$

2) Usando la definición de integral de la función constante 1 sobre el dominio D, que da

$$Volume(\text{cilindro}) = \int_D 1 \ dx \ dy. \tag{9.14}$$

De la comparación de (9.13) y (9.14) resulta

$$\text{Area}(D) = \int_D \ dx \ dy.$$



La misma argumentación se puede hacer considerando un dominio D de $\mathbb{R}^n$ y el hipercilindro de altura 1 y base D en $\mathbb{R}^{n+1}$, y da como consecuencia

$$n - Volume(D) = \int_D \ dx_1 \ldots \ dx_n.$$

En particular, si D es un dominio de $\mathbb{R}^3$,

$$Volume(D) = \int_D \ dx \ dy \ dz. \tag{9.15}$$

Veamos como aplicar estas fórmulas para el cálculo de algunas áreas y volúmenes (en algunos casos volveremos a obtener métodos ya usados para calcular áreas y volúmenes en el estudio de la integración de funciones de una sola variable).

E1. Calcular el volumen del dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le xy + e^x\}$. Aplicando la fórmula (9.15):

$$Volume(D) = \int_D \ dx \ dy \ dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{xy+e^x} \ dz \right) dy \right) dx$$

$= \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy + e^x) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy}{2} + y\ e^x \right]_0^2 dx = \int_0^1 2(x + e^x) dx$
$= \left[x^2 + 2e^x \right]_0^1 = 2\ e - 1.$

E2. Calcular el volumen del dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \rho \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$. Aplicando la fórmula (9.15): $Volume(D) = \int_D dx\ dy\ dz$. Por la forma del dominio, lo mejor para calcular esta integral es usar coordenadas esféricas. En esas coordenadas $D = \{(r, \theta, \phi);\ \sqrt{\rho} \leq r \leq \sqrt{R},\ 0 \leq \theta\ 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$. Por lo tanto

$$Volume(D) = \int_D dx\ dy\ dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_\rho^R r^2 \cos\phi dr \right) d\phi \right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \cos\phi \right]_\rho^R d\phi \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^3 - \rho^3}{3} \operatorname{sen}\phi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\pi\ 2 \frac{R^3 - \rho^3}{3}.$$

E3. Calcular el área del dominio plano limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = 3x$.

Primero, para determinar bien el dominio, calculamos las intersecciones de las gráficas de las funciones que nos dan
$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 \\ y = 3x \end{array}\right\}$, $x^2 - 3x = 0$, $x(x - 3) = 0$, de donde las soluciones son $x = 0$, $x = 3$. Luego $0 \leq x \leq 3$. En ese intervalo $x^2 - 3x = x(x - 3) \leq 0$, luego $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 3,\ x^2 \leq y \leq 3x\}$. Aplicando la fórmula (9.15):

$$\text{Area}(D) = \int_D dx\ dy = \int_0^3 \left(\int_{x^2}^{3x} dy \right) dx = \int_0^3 \left(3x - x^2 \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{6}.$$

9.5 Ejercicios.

1. Determina el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $x + y = 2$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$.

2. Calcula el volumen del dominio limitado por el cilindro $y^2 = 4 - z$ y los planos $y = 2x$, $x = 0$ y $z = 0$.

3. Calcula el volumen del dominio limitado por el cilindro $x^2 = 4y$ y los planos $3x + y - z = 0$, $x = 2y$ y $z = 0$.

4. Calcula el volumen del dominio limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 7x$, $y = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.

5. Calcula el volumen del dominio limitado por el cilindro $(x^2 + y^2)z = 1$ y los planos $y = x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.

6. Calcula el volumen del dominio limitado por el cilindro $y = \cos x$ y los planos $z = y, x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ y $z = 0$.

7. Calcula el volumen del dominio limitado por el cilindro $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ y los planos $x + z = a$, $x = 0, y = 0$ i $z = 0$.

8. Calcula el volumen del dominio espacial determinado por la gráfica de la función $z = 2x + 3y$ sobre el dominio plano $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

9. Calcula el volumen del dominio espacial determinado por la gráfica de la función $z = 2x + 1$ sobre el dominio plano $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

10. Calcula el volumen del dominio espacial determinado por la gráfica de la función $z = 4 - y^2 - \frac{1}{4}x^2$ sobre el dominio plano $(y - 1)^2 + x^2 \leq 1$.

11. Calcula el volumen del dominio limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

12. Calcular la integral de la función $x^2\ z$ sobre el dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 2 \leq z \leq 3\}$.

13. Calcular la integral de la función z sobre el dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z^2 + y^2 \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}$.

14. Calcular la integral de la función xyz sobre el dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

15. Calcular el volumen de la región limitada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 10$.

16. Calcular el volumen de la región limitada por las superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 20$ y $z = x^2 + y^2$.

17. Calcular el volumen de la región limitada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 1$.

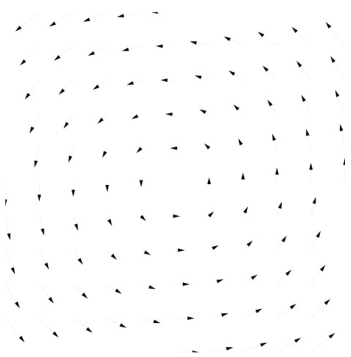
Capítulo 10

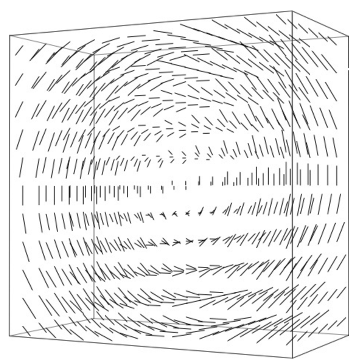
Integrales de línea (o curvilíneas) y de superficie

10.1 Campos vectoriales gradiente

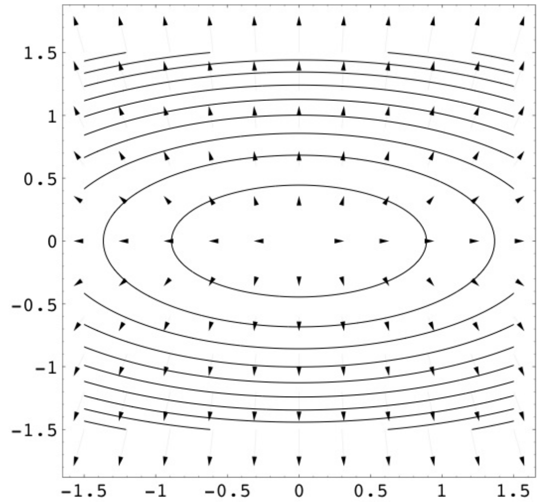
Recordemos que un *campo vectorial* X en o sobre $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El nombre le viene de que una tal aplicación hace corresponder a un punto de $\mathbb{R}^n$ un vector de $\mathbb{R}^n$, y a esto lo llaman los físicos campo vectorial frente a los *campos escalares*, que a un punto de $\mathbb{R}^n$ le hace corresponder un número (un elemento de $\mathbb{R}$ y que, en el lenguaje matemático, son las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$). La representación "física" de un campo vectorial se hace dibujando, en cada punto de $\mathbb{R}^n$, una flecha, con la magnitud y dirección del vector que, a ese punto, le asigna el campo vectorial. Los siguientes dibujos representan

El campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ $X(u, v) = (-v, u)$ El campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ $X(x, y, z) = (0, -z, y)$





Entre estos campos vectoriales tienen especial interés los llamados *campos vectoriales gradiente* o *campos vectoriales derivados de un potencial*, que son aquellos campos vectoriales $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que existe una función (llamada *potencial* de X) $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica $X = \operatorname{grad} V$. Para estos campos, las dos propiedades esenciales que conocemos del gradiente (que es ortogonal a las hipersuperficies de nivel de la función y que da la dirección y el módulo de la máxima variación de la función) hacen que el campo vectorial quede igualmente bien descrito gráficamente dando el campo vectorial como un conjunto de flechas (como en los dibujos anteriores) o dando las hipersuperficies de nivel de la función de la que el campo es el gradiente. En este último caso, para visualizar mentalmente el campo vectorial, uno tiene que tener en cuenta que los correspondientes vectores son, en cada punto, ortogonales a las curvas de nivel, y de mayor longitud cuanto menor sea la separación entre las curvas de nivel adyacentes. Como un ejemplo, veamos la representación del campo vectorial $\operatorname{grad} V$, con $V(x, y) = 4y^2 + x^2$



Después de esta definición surge de modo natural la siguiente pregunta:

$$¿\text{cuándo un campo vectorial deriva de un potencial?}. \tag{10.1}$$

Comencemos examinando el caso de dimensión 2. Si X es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ que deriva de un potencial $V(x, y)$, es decir, $X = \operatorname{grad} V$, y $X = (X_1, X_2)$, entonces se tiene que

$$X_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial V}{\partial y},$$

de donde

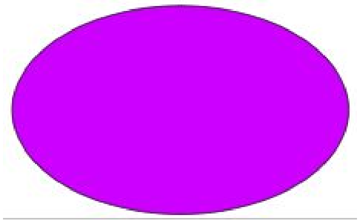
$$\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial x}, \tag{10.2}$$

es decir, (10.2) es una condición necesaria para que X sea un campo gradiente, pero, además, se demuestra que

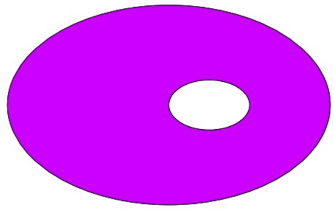
Teorema *Un campo vectorial X sobre un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$ deriva de un potencial si y solo si se verifica (10.2).*

Naturalmente, este teorema requiere explicar lo que se entiende por dominio simplemente conexo del plano. Como la noción matemática precisa es un poco complicada nos limitaremos a dar dos ideas que permitan entender lo que es sin precisar del todo su significado. *Un dominio D del plano se dice que es simplemente conexo si toda curva cerrada en D puede contraerse a un punto sin salirse de D*, o, también, *un dominio D del plano se dice que es simplemente conexo si no tiene agujeros.*

dominio simplemente conexo



dominio no simplemente conexo



Así, por ejemplo, *el campo vectorial* $X = (y^3, 3xy^2)$*, ¿es conservativo?. Si lo es, ¿cuál es su potencial?.* Para ver si es conservativo, aplicamos (10.2): $\dfrac{\partial X_1}{\partial y} = \dfrac{\partial y^3}{\partial y} = 3y^2$, $\quad \dfrac{\partial X_2}{\partial x} = \dfrac{\partial 3xy^2}{\partial x} = 3y^2$, luego $\dfrac{\partial X_1}{\partial y} = \dfrac{\partial X_2}{\partial x}$, luego X es conservativo. Buscamos ahora una función V que verifique

$$\operatorname{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = (y^3, 3xy^2) = X, \tag{10.3}$$

igualando las dos primeras componentes, tenemos la ecuación

$$y^3 = \frac{\partial V}{\partial x},$$

integrando respecto de x,

$$V = \int \frac{\partial V}{\partial x}\, dx = \int y^3 \, dx = y^3 x + C(y), \tag{10.4}$$

donde $C(y)$ es, para cada valor de y, un número real arbitrario (lo que llamábamos una constante arbitraria) o, lo que es lo mismo, una función arbitraria de y (sólo de y).

Igualando ahora las dos segundas componentes de (10.3), y, teniendo en cuenta que ya sabemos que $V(x, y)$ es de la forma (10.4),

$$3xy^2 = \frac{\partial V}{\partial y} = 3y^2 x + C'(y),$$

de donde resulta que $C'(y) = 0$, y, por lo tanto, $C(y)$ ha de ser constante, luego el potencial buscado V es de la forma $V = y^3 x + C$, siendo C una constante arbitraria.

Otro ejemplo, *veamos si el campo vectorial* $X(x, y) = (-y, x)$ *del primer dibujo es conservativo.* Como antes, aplicamos (10.2): $\dfrac{\partial X_1}{\partial y} = \dfrac{\partial(-y)}{\partial y} = -1$, $\quad \dfrac{\partial X_2}{\partial x} = \dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$, luego $\dfrac{\partial X_1}{\partial y} \neq \dfrac{\partial X_2}{\partial x}$, luego X no es conservativo.

Vamos ahora a responder a la cuestión (10.1) cuando $n = 3$. Si X es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ que deriva de un potencial $V(x, y, z)$, es decir, $X = \operatorname{grad} V$, y $X = (X_1, X_2, X_3)$, entonces se tiene que

$$X_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad X_3 = \frac{\partial V}{\partial z},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial y} &= \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial x}, \\
\frac{\partial X_1}{\partial z} &= \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial X_3}{\partial x}, \\
\frac{\partial X_2}{\partial z} &= \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial X_3}{\partial y},
\end{aligned} \tag{10.5}$$

es decir, las tres ecuaciones (10.5) son una condición necesaria para que X sea un campo gradiente, pero, además, se demuestra que

Teorema *Un campo vectorial X sobre un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^3$ deriva de un potencial si y solo si se verifican las ecuaciones (10.5).*

La definición de dominio simplemente conexo es como la del plano, pero ahora hay que tener mucho cuidado con el concepto de "sin agujeros", pues, en $\mathbb{R}^3$ no todos los agujeros son iguales, por ejemplo, $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ es simplemente conexo, a pesar de haberle hecho un agujero quitándole el punto $(0,0,0)$ (sin embargo $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no es simplemente conexo). Así es que, para $\mathbb{R}^3$, es mejor quedarse solo con la definición que hace referencia a la contracción de curvas.

De una manera más condensada, se suele decir que X es *irrotacional* para expresar que verifica las ecuaciones (10.5). Vamos a explicar el por qué de esta terminología. Comenzaremos definiendo el operador rotacional, que es una aplicación que lleva campos vectoriales en campos vectoriales o, dicho de otra manera, es un operador que opera sobre un campo vectorial para dar otro campo vectorial. Definir el operador rotacional consistirá en explicar el modo en que opera sobre un campo vectorial.

Comenzaremos definiendo el "vector formal" $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (lo llamamos vector formal porque sus componentes no son números, como las de los vectores, sino operadores de derivación parcial, que al actuar sobre una función dan la correspondiente derivada parcial de la función). Se define ahora el *rotacional de un campo vectorial X de* $\mathbb{R}^3$ como el campo vectorial $\operatorname{rot} X$ que se obtiene por el "producto vectorial formal" $\vec{\nabla} \wedge X$ de $\vec{\nabla}$ y X, así:

$$\operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z},\ -\frac{\partial X_3}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z},\ \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}\right).$$

Resulta claro de esta definición y del teorema a continuación de las fórmulas (10.5) que

Teorema *Un campo vectorial X sobre un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^3$ deriva de un potencial si y solo si* $\operatorname{rot} X = 0$.

Por otro lado, *se dice que un campo vectorial X sobre* $\mathbb{R}^3$ *es irrotacional si* $\operatorname{rot} X = 0$, lo que acaba la justificación del comentario hecho antes.

Así, por ejemplo, *el campo vectorial $X = (2xyz, x^2z, x^2y)$, ¿es conservativo?. Si lo es, ¿cuál es su potencial?.* Para ver si es conservativo, calculamos su rotacional: $\operatorname{rot} X =$

$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} = 0$, luego X es conservativo. Buscamos ahora una función V que verifique

$$\operatorname{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (2xyz, x^2z, x^2y) = X, \tag{10.6}$$

igualando las dos primeras componentes, tenemos la ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xyz,$$

integrando respecto de x,

$$V = \int \frac{\partial V}{\partial x}\, dx = \int 2xyz\, dx = x^2yz + C(y, z), \tag{10.7}$$

donde $C(y, z)$ es, para cada valor de y y de z, un número real arbitrario (lo que llamábamos una constante arbitraria) o, lo que es lo mismo, una función arbitraria de (y, z) (sólo de (y, z), no de x).

Igualando ahora las dos segundas componentes de (10.6), y, teniendo en cuenta que ya sabemos que $V(x, y, z)$ es de la forma (10.7),

$$x^2z = \frac{\partial V}{\partial y} = x^2z + \frac{\partial C(y, z)}{\partial y},$$

de donde resulta que $\dfrac{\partial C(y, z)}{\partial y} = 0$, y, por lo tanto, $C(y, z)$ ha de ser función solo de z, $C(y, z) = C(z)$. Teniendo en cuenta esto y (10.7), e igualando las terceras componentes de (10.6), tenemos

$$x^2y = \frac{\partial V}{\partial z} = x^2y + C'(z),$$

de donde se deduce que $C'(z) = 0$ y $C(z) = c$ es constante, por lo tanto, la función potencial buscada es $V(x, y, z) = x^2yz + C$.

Otro ejemplo, *veamos si el campo vectorial $X(x, y, z) = (0, -z, y)$ del segundo dibujo es conservativo.* Como antes, calculamos el rotacional: $\operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = (2, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$, luego X no es conservativo.

10.2 Integración de campos vectoriales a lo largo de una curva.

Definición*Dado un campo vectorial $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y una curva $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se define la integral curvilínea (o de línea) de X sobre (o a lo largo de) c por*

$$\int_c X dc := \int_a^b \langle X(c(t)), c'(t)\rangle dt.$$

Si X es un campo de fuerzas de la Física, la integral curvilínea $\int_c X dc$ representa el trabajo realizado cuando una partícula (sensible a ese campo de fuerzas) es empujada a lo largo de la curva c por la fuerza X.

Ejemplo *Calcular la integral curvilínea del campo vectorial* $X = (xz, yz, x)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *sobre la curva* $c(t) = (1, t, t^2)$ *para* $0 \leq t \leq 1$. Teniendo en cuenta que, para este X y esta c, $X(c(t)) = (x(t)z(t), y(t)z(t), x(t)) = (1t^2, tt^2, 1) = (t^2, t^3, 1)$, y $c'(t) = (0, 1, 2t)$, aplicando la definición de integral curvilínea, $\int_c X dc = \int_0^1 \langle X(c(t)), c'(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle (t^2, t^3, 1), (0, 1, 2t)\rangle dt = \int_0^1 (t^3 + 2t) dt = \frac{5}{4}$.

Denotaremos por c^- a *la curva inversa de* c, es decir, la curva que tiene el mismo recorrido que c pero en sentido inverso, que puede expresarse como $c^-(t) = c(a+b-t)$, pues la imagen por c^- de $[a, b]$ es la misma que su imagen por c, y $c^-(a) = c(b)$ y $c^-(b) = c(a)$. Una consecuencia de esta definición y de la definición de integral de línea es que

$$\int_{c^-} X dc^- = -\int_c X dc,$$

debido a que ${c^-}'(t) = -c'(a + b - t)$.

Dado un campo vectorial X sobre $\mathbb{R}^n$ dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^n$, para cada curva c uniendo p y q (es decir, verificando que $c(a) = p$ y $c(b) = q$, hay definida una integral $\int_c X dc$. Es natural preguntarse si esta integral depende de la curva c o solo de los puntos p y q. En general, depende de la curva c. Así, si consideramos el mismo campo vectorial $X = (xz, yz, x)$ del ejemplo anterior, y calculamos su integral sobre la curva $\gamma(t) = (1, t, t)$ para $0 \leq t \leq 1$, se tiene que las curvas γ que acabamos de definir y c del ejemplo anterior unen los mismos puntos $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$, sin embargo, $\int_\gamma X d\gamma = \int_0^1 \langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle (t, t^2, 1), (0, 1, 1)\rangle dt = \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \frac{4}{3} \neq \int_c X dc$, luego, en general, la integral curvilínea de un campo vectorial depende de la curva sobre la que se integra el campo, además de depender de los extremos de la curva. Sin embargo,

Teorema *Si* X *es un campo conservativo sobre* $\mathbb{R}^n$*, dados* $p, q \in \mathbb{R}^n$ *entonces* $\int_c X dc$ *tiene el mismo valor para todas las curvas* $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que verifiquen* $c(a) = p$ *y* $c(b) = q$.

Este teorema, junto con la interpretación física de la integral curvilínea como un trabajo, dan un sentido físico a la expresión campo conservativo que se deja al lector descubrir.

Vamos con la demostración de este teorema. Si X es un campo conservativo, entonces existe una función potencial $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $X = \operatorname{grad} V$. Se tiene entonces que, si $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, $\int_c X dc = \int_a^b \langle (\operatorname{grad} V)(c(t)), c'(t)\rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} dt =$ |aplicando la regla de la cadena| $= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{dV(c(t))}{dt} dt = V(c(b) - V(c(a)) = V(q) - V(p)$, con lo que hemos demostrado que

Si X es un campo conservativo con función potencial V, y $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva que verifica $c(a) = p$ y $c(b) = q$, entonces

$$\int_c X dc = V(q) - V(p). \tag{10.8}$$

Este resultado claramente demuestra el teorema enunciado antes, y, además hemos obtenido con esta demostración la fórmula (10.8).

Aplicando esta fórmula al ejemplo del campo vectorial $X = (2xyz, x^2z, x^2y)$ estudiado en un ejemplo de la sección anterior, como vimos que $X = \operatorname{grad} V$ con $V = x^2yz+C$, obtenemos que, si $c(t) = (1, t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\int_c X dc = V(c(1)) - V(c(0)) = V(1,1,1) - V(1,0,0) = (1+C) - (0+C) = 1.$$

EJERCICIO a desarrollar en clase: Usar la fórmula (10.8) para el cálculo de potenciales.

Un caso especial de integrales curvilíneas es el de integrales sobre curvas cerradas. *Una curva $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es cerrada si $c(a) = c(b)$*, es decir, su imagen tiene la forma de un lazo. Para la integral a lo largo de una curva cerrada es frecuente usar el símbolo $\oint_c X dc$ para indicar la integral de X sobre c. Es decir, $\oint_c X dc = \int_c X dc$, pero el símbolo $\oint_c$ lleva, además, la información de que la curva c es cerrada. De la fórmula (10.8) resulta que: *Si la curva c es cerrada y el campo X es conservativo,* $\oint_c X dc = 0$.

Notación $\int_c (X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz)$ significa $\int_c (X_1, X_2, X_3) dc$.

Si X es una campo conservativo, $\int_p^q (X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz)$ significa $\int_c (X_1, X_2, X_3) dc$, siendo c una curva cualquiera que une p y q, ya que, por (10.8), no importa quien sea la curva c.

Ejercicios

Evaluar cada una de las siguientes integrales de campos conservativos. Primero, comprobar que el campo es conservativo, y, a continuación, evaluar la integral empleando uno de los dos procedimiento que hemos visto: o integrar eligiendo una curva que una los dos puntos, o calculando la función potencial y aplicando (10.8)

1. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} (y\ dx + (x + 3y^2)\ dy)$

2. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,e)} (\ln y\ dx + \frac{x}{y}\ dy)$

3. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{3})} (\operatorname{sen} y\ dx + x \cos y\ dy)$

4. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (2xyz\ dx + x^2 z\ dy + x^2 y\ dz)$

5. $\displaystyle\int_{(0,1,1)}^{(\frac{\pi}{2},1,2)} (-\operatorname{sen} x\ dx + z\ dy + y\ dz)$

6. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(0,1,1)} (e^x\ dx + 2yz\ dy + y^2\ dz)$

10.3 Teorema de Green en el plano.

Una curva cerrada $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es simple si los extremos a, b son los únicos puntos en los que la aplicación c no es inyectiva

Una curva plana $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ simplemente cerrada se dice que está positivamente orientada si una partícula que viaje con la curva en el sentido del parámetro t creciente describe un movimiento con sentido contrario al de las agujas de un reloj, y negativamente orientada si ese movimiento es en la misma dirección que la de las agujas de un reloj.

Así, por ejemplo, la curva $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ está positivamente orientada, mientras que la curva $c(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$ está negativamente orientada.

Teorema de Green *Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones diferenciables definidas sobre un dominio plano D cuya frontera ∂D es una curva cerrada simple c positivamente orientada, entonces*

$$\oint_c (P, Q) dc = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{10.9}$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este resultado:

E.10.3.1 *Calcular la integral curvilínea del campo vectorial $X = (x^2 - y^2), xy)$ sobre la curva $c(t)$ que es la frontera del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 2)$ orientada positivamente.* Aplicando el teorema de Green

$$\oint_c X dc = \int_D \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} \right) dxdy = \int_0^2 \int_0^2 (y - (-2y)) dydx = 12.$$

Obsérvese que si $X = (P(x, y), Q(x, y))$ es un campo conservativo sobre una región plana D cuya frontera es una curva cerrada simple c, entonces se verifica (10.2), es decir $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, de modo que el teorema de green vuelve a demostrar que si c es una curva cerrada simple y X es conservativo $\displaystyle\oint_c X dc = 0$.

Además, el teorema de Green también permite calcular el área de un dominio del plano así:

Dado un dominio plano D cuya frontera es una curva cerrada simple c positivamente orientada,

$$Area(D) = \oint_c (0, x) dc = |\textit{usando la notación indicada antes}| = \oint_c x\ dy. \tag{10.10}$$

En efecto Por el teorema de Green, $\oint_c (0,x)dc = \int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right) dxdy = \int_D dxdy = Area(D)$.

Como ejemplo, *vamos a calcular el área del dominio limitado por la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Observemos que la frontera de este dominio es la elipse que podemos parametrizar por $c(t) = (a\ \cos t,\ b\ \operatorname{sen} t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, con lo que c es una curva cerrada simple. Aplicando (10.10), $Area(D) = \oint_c (0,x)dc = \int_0^{2\pi} \langle (0, a\ \cos t), (-a \operatorname{sen} t, b\ \cos t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} a\ b\ \cos^2 t\ dt = ab\pi$.

Ejercicios

.

Evaluar cada una de las siguientes integrales usando el teorema de Green

1. $\oint_c \big((x^2+y^2)\ dx - xy\ dy\big)$, donde c es la curva frontera del rectángulo $[0,1] \times [0,2]$ positivamente orientada.

2. $\oint_c \big((3x^2y+y^3)\ dx - y^{10}\ dy\big)$, donde c es la curva frontera del disco $x^2+y^2 \leq 4$ positivamente orientada.

3. $\oint_c ((e^x+y)\ dx - (x-e^y)\ dy)$, donde c es la curva frontera del triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,-1)$ y $(1,0)$ positivamente orientada.

4. $\oint_c \big((y^2+x)\ dx + (xy-y)\ dy\big)$, donde c es la curva $c(t) = \left(\frac{\cos t}{3}, -\frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

5. $\oint_c \big((y^2+x^2)\ dx + (2x-y^2)\ dy\big)$, donde c es la curva $c(t) = (-3\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Calcular el área de la región limitada por cada una de las curvas siguientes usando el teorema de Green. Comprobar los resultados repitiendo el cálculo haciendo una integral doble con Mathematica.

6. $c = \{(x,y);\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$.

7. $c = \{(-\frac{\cos t}{4}, \frac{\sin t}{25});\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

8. $c = \{(\cos^3 t, \sin^3 t);\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

9. $c = \{(\cos t + \operatorname{sen} t, \cos t - \sin t);\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

10. c es la curva frontera del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ y $(-1,4)$.

11. c es la curva frontera del cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ y $(-1,5)$.

10.4 Elemento de área de una superficie

Dada una superficie que es la gráfica de una función $z = f(x,y)$ de $erre^2$ en $\mathbb{R}$, definida sobre un dominio D del plano, su área es la suma de las áreas de los "rectángulos curvilíneos infinitesimales" imágenes de rectángulos infinitesimales en el plano. Si en el dominio D consideramos un punto (x,y) y uno de tales rectángulos infinitesimales, de vértices

(x,y), $(x+\Delta x, y)$, $(x, y+\Delta y)$, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$,

el correspondiente rectángulo curvilíneo en la superficie tendrá por vértices

$(x,y,f(x,y))$, $(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y))$, $(x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y))$, $(x+\Delta x, y+\Delta y, (x+\Delta x, y+\Delta y))$,

que, a su vez, viene aproximado por el rectángulo generado por los vectores

$(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y)) - (x,y,f(x,y)) = (\Delta x, 0, f(x+\Delta x, y) - f(x,y))$ y

$(x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y)) - (x,y,f(x,y)) = (0, \Delta y, f(x, y+\Delta y) - f(x,y))$.

Usando el desarrollo de Taylor,

$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \sim \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y$ y $f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \sim \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x$,

luego el área del rectángulo curvilíneo infinitesimal es, aproximadamente,

$$|(\Delta x, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x) \wedge (0, \Delta y, \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y)| = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \\ 0 & \Delta y & \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \end{pmatrix} \right| \tag{10.11}$$

$$= \left| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \Delta y,\ -\frac{\partial f}{\partial y}\Delta x \Delta y,\ \Delta x \Delta y \right) \right| \tag{10.12}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ \Delta x\ \Delta y. \tag{10.13}$$

El área de la superficie S cuando $(x,y) \in D$ será la suma de esas áreas cuando, $(x,y) \in D$, $\Delta x \to 0$ y $\Delta Y \to 0$, que se corresponde con la definición que dimos de integral de una función sobre un dominio D, por lo tanto:

Teorema *El área de la superficie $S = \{(x,y,z);\ z = f(x,y,\ (x,y) \in D\}$ viene dada por*

$$Area(S) = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dx\ dy$$

A lo que hay que integrar para obtener el elemento de área de una superficie lo llamaremos elemento de área de la superficie, y lo denotaremos por $d\sigma$. Con esta terminología, el teorema anterior dice que el área de una superficie es $Area(S) = \int_s d\sigma$ y que si $S =$

$\{(x,y,z);\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$ y el área se calcula integrando sobre D, entonces $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dx\ dy$

Veamos algunos ejemplos:

E.8.4.1 *Determinar el área de la porción del plano $x + 2y + 6z = 12$ que está dentro del cilindro* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$. Se trata de la superficie $S = \{(x,y,z);\ x+2y+6z = 12$ y $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} \leq 1\}$. Por lo tanto, la función que describe la superficie es (despejando z de la ecuación del plano) $z = f(x,y) = \frac{1}{6}(12-x-2y)$ y $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{6}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{3}$. El dominio D es $D = \{(x,y);\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} \leq 1\}$. Aplicando la fórmula que acabamos de dar para el área:

$$Area(S) = \int_D \sqrt{1 + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}}\ dx\ dy,$$

y, para calcular la integral sobre D, hacemos el cambio de variable $x = 5r\cos\theta$, $y = 3r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con lo que, en las nuevas variables, $D = \{(r,\theta);\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Además, $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\cos\theta & -5\ r\ \mathrm{sen}\,\theta \\ 3\ \mathrm{sen}\,\theta & 3\ r\ \cos\theta \end{vmatrix} = 15\ r$. Por lo tanto,

$$Area(S) = \int_D \sqrt{\frac{41}{36}}\ dx\ dy, = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{41}{36}}\ 15\ r\ dr\ d\theta = \frac{5\sqrt{41}}{2}\ \pi.$$

10.5 Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

Un campo vectorial normal continuo sobre una superficie E es la asignación, de modo continuo, a cada punto de S, de un vector normal (ortogonal) a la superficie en ese punto.

Llamaremos **orientación** sobre una superficie S de $\mathbb{R}^3$ a la elección de un campo vectorial $\vec{n}$ normal unitario y continuo sobre S.

Una superficie se dice que es orientable si admite una tal orientación. Por ejemplo, son orientables las superficies de nivel de una función $\phi(x,y,z)$, con

$$\vec{n} = \pm\frac{\mathrm{grad}\,\phi}{|\,\mathrm{grad}\,\phi|}(x,y,z),$$

y las que son gráficas de una función $z = f(x,y)$, pues estas son también superficies de nivel de $\phi(x,y,z) = z - f(x,y)$. y

$$\vec{n} = \pm\frac{\mathrm{grad}\,\phi}{|\,\mathrm{grad}\,\phi|}(x,y,z) = \pm\frac{(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}(x,y,z).$$

Cada uno de los signos $\pm$ define una orientación sobre estas superficies S.

Si $X:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y S es una superficie orientada por un campo vectorial unitario normal $\vec{n}$, se define la integral de X sobre S, también llamada flujo de X a través de S por la fórmula

$$\int_S \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma.$$

Si $S = \{(x,y,z);\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$, aplicando la definición anterior, las fórmulas que acabamos de dar para $\vec{n}$, tomando la orientación que corresponde al signo "+" en esa fórmula, y la fórmula vista para $d\sigma$ en el epígrafe anterior,

$$\int_S \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma = \int_D \left\langle X, \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \right\rangle \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dx\ dy$$

$$= \int_D \left\langle X, \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\right\rangle\ dx\ dy = \int_D \left(-X_1\frac{\partial f}{\partial x} - X_2\frac{\partial f}{\partial y} + X_3\right)\ dx\ dy \quad (10.14)$$

llamaremos a esta integral "integral del campo vectorial X sobre S con la orientación **k**-positiva" (por ser positiva la tercera componente del vector $\vec{n}$), o, también, "flujo **k**-positivo del campo vectorial X a través de la superficie S". Si tomamos el signo opuesto para $\vec{n}$, obtenemos el llamado "flujo **k**-negativo de X a través de S", que viene dado por la misma fórmula anterior pero con signo opuesto.

Veamos algunos ejemplos:

E.8.5.1 *Determinar el flujo* **k***-positivo del campo vectorial* $X = (x^2, xy, 1)$ *a través de la porción del plano* $a\,x + b\,y + c\,z = d$ *que verifica* $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Primero escribimos la ecuación del plano $a\,x+b\,y+c\,z = d$ en forma de gráfica de una función $z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$, luego observamos que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, y ahora aplicamos la fórmula (10.14):

$$\int_S \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 \left(+x^2\ \frac{a}{c} + x\ y\ \frac{b}{c} + 1\right) dx\ dy = \frac{a}{3c} + \frac{b}{4c} + 1.$$

E.8.5.2 *Determinar el flujo* **k***-positivo del campo vectorial* $X = (x, y, 0)$ *a través de la porción del cono* $z = 1 - x^2 - y^2$ *que verifica* $z \ge 0$. Como $z \le 0$, $x^2 + y^2 \le 1$, luego $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$, y ahora aplicamos la fórmula (10.14), usando un cambio a coordenadas polares para calcular la integral:

$$\int_S \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma = \int_D \left(-2x^2 - 2y^2 + 0\right) dx\ dy = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2 r\ dr\ d\theta = -\frac{4\pi}{3}.$$

Si queremos calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie que no viene dada por la gráfica de una función, dividimos la superficie en trozos cuya unión sea la superficie total y tales que cada una de ellos se pueda representar por la gráfica de una función y la intersección de cada dos trozos sea, a lo sumo, una curva. Entonces, el flujo a través de toda la superficie es la suma de los flujos a través de cada uno de esos trozos.

En este caso ya no se puede hablar, en general, de flujo **k**-positivo o **k**-positivo, porque ya no será posible que la tercera componente de $\vec{n}$ tenga el mismo signo en toda la superficie. Habrá que explicar cuál de los dos $\vec{n}$ se toman en una superficie orientable. Si la superficie S limita un dominio D del espacio, una manera de indicar el $\vec{n}$ que se toma es decir si apunta hacia afuera o hacia el interior del dominio.

Veamos algunos ejemplos:

E.8.5.3 *Determinar el flujo del campo vectorial* $X = (x, y, 0)$ *a través del elipsoide* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ *con la orientación dada por el vector normal apuntando hacia afuera del elipsoide.* Primero dividimos el elipsoide en los dos pedazos S_+ y S_- definidos por las gráficas de las funciones $z = c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ y $z = -c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$. Para ambos trozos podemos escribir $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Tomaremos la orientación de la superficie elipsoide con el vector normal apuntando hacia afuera, que tiene la tercera componente positiva para la gráfica de la primera función y negativa para la de la segunda, por lo tanto hay que calcular el **k**-flujo positivo para la primera función y el k-negativo para la segunda. Por ello, hemos de aplicar la fórmula (10.14) al pedazo de superficie gráfica de la primera función, y la misma fórmula pero con signo negativo para el pedazo gráfica de la segunda función, y sumar después, así:

$$\int_S \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma = \int_{S_+} \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma + \int_{S_-} \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma \tag{10.15}$$

$$= \int_D \left(-x\frac{-c\ x}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} - y\frac{-c\ y}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + 0 \right) dx\ dy \tag{10.16}$$

$$+ \int_D \left(x\frac{-(-c\ x)}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + y\frac{-(-c\ y)}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} - 0 \right) dx\ dy \tag{10.17}$$

$$= 2\ c\ \int_D \left(\frac{x^2}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + \frac{y^2}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \right) dx\ dy, \tag{10.18}$$

para calcular esta integral, usamos el cambio de variable $x = a\ r\cos\theta$, $y = b\ r\operatorname{sen}\theta$. Con este cambio $D = \{(r, \theta);\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, y Además, $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\ r\ \operatorname{sen}\theta \\ b\ \operatorname{sen}\theta & b\ r\ \cos\theta \end{vmatrix} = a\ b\ \ r$, con lo que el integrando se convierte en

$$a\ b\ \ r\frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2\sqrt{1-r^2}} + \frac{b^2r^2\operatorname{sen}^2\theta}{b^2\sqrt{1-r^2}} = \frac{a\ b\ r^3}{\sqrt{1-r^2}},$$

de donde

$$\int_S \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma = 2\ a\ b\ c\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\ dr\ d\theta,$$

calculamos la integral respecto de r por partes

$$\int \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = \int r^2 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$
$$= -r^2\sqrt{1-r^2} + \int 2r\sqrt{1-r^2}dr = -r^2\sqrt{1-r^2} - \frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}, \quad (10.19)$$

y, sustituyendo esto en la integral anterior, obtenemos:

$$\int_S \langle X, \vec{n}\rangle d\sigma = 4\ \pi\ a\ b\ c\ \frac{2}{3} = \frac{8\ \pi\ a\ b\ c}{3}.$$

E.8.5.4 *Determinar el flujo del campo vectorial* $X = (x, y, 0)$ *a través de la superficie formada por las seis caras del cubo* $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ *con la orientación dada por el vector normal apuntando hacia afuera del cubo.*

Las caras del cubo son seis. Escribimos a continuación las seis ecuaciones correspondientes y el tipo de orientación que define el vector normal hacia afuera. Hay que tener en cuenta que, de las seis caras del cubo, sólo dos pueden escribirse como la gráfica de una función $z = f(x, y)$. De las otras, hay dos que se escriben como la gráfica de una función $y = f(x, z)$ y otras dos que se escriben como la gráfica de una función $x = f(y, z)$. Para las que son de la forma $y = f(x, z)$, hay que intercambiar los papeles de las variables z e y en la fórmula (10.14), y hay que cambiar también la **k**-positividad/negatividad por la **j**-positividad/negatividad. Para las que son de la forma $x = f(y, z)$, hay que intercambiar los papeles de las variables z y x en la fórmula (10.14), y hay que cambiar también la **k**-positividad/negatividad por la **i**-positividad/negatividad.

Describimos ahora las ecuaciones y orientaciones a tomas de cada una de las caras:

Primera Cara S_{z0}: Gráfica de la función $z = 0$ definida sobre el dominio $D_1 = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq {}^{\underline{o}},\ 0 \leq y \leq 1\}$, con orientación **k**-negativa;

Segunda Cara S_{z1}: Gráfica de la función $z = 1$ definida sobre el dominio D_1, con orientación **k**-positiva;

Tercera Cara S_{y0}: Gráfica de la función $y = 0$ definida sobre el dominio $D_2 = \{(x, z);\ 0 \leq x \leq {}^{\underline{o}},\ 0 \leq z \leq 1\}$, con orientación **j**-negativa;

Cuarta Cara S_{y1}: Gráfica de la función $y = 1$ definida sobre el dominio D_2, con orientación **j**-positiva;

Quinta Cara S_{x0}: Gráfica de la función $x = 0$ definida sobre el dominio $D_3 = \{(y, z);\ 0 \leq y \leq {}^{\underline{o}},\ 0 \leq z \leq 1\}$, con orientación **i**-negativa;

Sexta Cara S_{x1}: Gráfica de la función $x = 1$ definida sobre el dominio D_3, con orientación **i**-positiva.

Usando esta división de la superficie del cubo y la fórmula (10.14) con las modificaciones que acabamos de indicar, tenemos:

$$\int_S \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma = \int_{S_{z0}} \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma + \int_{S_{z1}} \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma + \int_{S_{y0}} \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma + \int_{S_{y1}} \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma \tag{10.20}$$

$$+ \int_{S_{x0}} \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma + \int_{S_{x1}} \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma \tag{10.21}$$

$$= \int_{D_1} (x\times 0 + y\times 0 - 0\times 1)\ dx\ dy + \int_{D_1} (-x\times 0 - y\times 0 + 0\times 1)\ dx\ dy \tag{10.22}$$

$$\int_{D_2} (x\times 0 - y\times 1 + 0\times 0)\ dx\ dz + \int_{D_2} (-x\times 0 + y\times 1 - 0\times 0)\ dx\ dz \tag{10.23}$$

$$\int_{D_3} (-x\times 1 + y\times 0 + 0\times 0)\ dy\ dz + \int_{D_3} (x\times 1 - y\times 0 - 0\times 0)\ dy\ dz \tag{10.24}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (-0\times 1)\ dx\ dz + \int_0^1\int_0^1 (1\times 1)\ dx\ dz \tag{10.25}$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 (-0\times 1)\ dy\ dz + \int_0^1\int_0^1 (1\times 1)\ dy\ dz = 2. \tag{10.26}$$

Nota *Si X representa el campo de velocidades de un fluido que se mueve en el espacio $\mathbb{R}^3$, $\int_S \langle X,\vec{n}\rangle d\sigma$ representa el flujo de fluido (volumen de fluido por unidad de tiempo) que atraviesa la superficie S.*

10.6 Teorema de la divergencia

Del mismo modo que el teorema de Green permitía relacionar la integral de un campo vectorial sobre una curva plana cerrada con la integral de una función (relacionada con el campo vectorial) sobre el dominio del plano limitado por la curva, existe un teorema que relaciona la integral de un campo vectorial sobre una superficie de $\mathbb{R}^3$ que limita un dominio D de $\mathbb{R}^3$ con la integral de una cierta función (asociada al campo vectorial) sobre ese dominio D. Es el llamado teorema de la divergencia, que vamos a estudiar ahora.

La función que, en el teorema de la divergencia, se asocia al campo vectorial es la llamada divergencia del campo vectorial, que pasamos a definir ahora:

Definición *Dado un campo vectorial $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se llama divergencia de X a la función* $\operatorname{div} X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}.$$

Así, por ejemplo:
la divergencia del campo vectorial $X = (3x^2y, -2x^3y^4z, z^5)$ es

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial 3x^2y}{\partial x} + \frac{\partial - 2x^3y^4z}{\partial y} + \frac{\partial z^5}{\partial z} = 6xy - 8x^3y^3z + 5z^4,$$

la divergencia del campo vectorial $X = (2e^x \cos(yz), \ln y, \cos(xz))$ es

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial 2e^x \cos(yz)}{\partial x} + \frac{\partial \ln y}{\partial y} + \frac{\partial \cos(xz)}{\partial z} = 2e^x \cos(yz) + \frac{1}{y} - x \operatorname{sen}(xz).$$

Teorema de la divergencia *Si S es una superficie sin autointersecciones que encierra un dominio Ω (lo que expresaremos diciendo que S es la frontera de Ω y denotaremos como $S = \partial\Omega$) y X es un campo vectorial diferenciable sobre $\mathbb{R}^3$, entonces se verifica que*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \; dx \; dy \; dz = \int_S \langle X, \vec{n} \rangle d\sigma,$$

tomando S orientada por un campo vectorial normal que apunta hacia afuera de Ω.

Como ejemplo de aplicación, podemos repetir, usando el teorema de la divergencia, las integrales de los ejemplos E.8.5.3 y E.8.5.4. En ambos casos el campo vectorial es $X = (x, y, 0)$, y su divergencia es $\operatorname{div} X = 1 + 1 + 0 = 2$. También en ambos casos
$\displaystyle\int_S \langle X, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} X \; dx \; dy \; dz = 2 \text{ volumen}(\Omega).$
En el caso del ejemplo E.8.5.3, Ω es la región del espacio limitada por un elipsoide de ejes a, b y c, cuyo volumen ya calculamos en otro ejercicio, y era $\frac{4}{3}\pi \; a \; b \; c$, por lo que
$\displaystyle\int_S \langle X, \vec{n} \rangle d\sigma = \frac{8}{3} \; \pi \; a \; b \; c.$
En el caso del ejemplo E.8.5.4, Ω es un cubo de lado 1, cuyo volumen sabemos que es 1, por lo que $\displaystyle\int_S \langle X, \vec{n} \rangle d\sigma = 2.$

Una consecuencia importante del teorema de la divergencia es que *si* $\operatorname{div} X = 0$*, el flujo de X a través de cualquier superficie $S = \partial\Omega$ es 0, es decir, $\int_S \langle X, \vec{n} \rangle d\sigma = 0$ para toda $S = \partial\Omega$.*

Juntando esta consecuencia con la interpretación hecha al final de la sección anterior del flujo de un campo vectorial como flujo de un fluido, resulta que la divergencia de un campo vectorial que representa las líneas de corriente de un fluido es 0 si y solo si el flujo total de fluido a través de cualquier superficie que limite un dominio es nulo, es decir, si y solo si la cantidad de fluido que entra en el interior de la superficie es igual a la cantidad de fluido que sale. Dicho de otra manera, la divergencia de un campo vectorial que representa las líneas de corriente de un fluido es cero si y solo si el fluido no tiene fuentes ni sumideros.

10.7 Teorema de Stokes

Así como el teorema de Green relacionaba la integral de un campo vectorial sobre una curva plana cerrada con la integral de una función asociada al campo vectorial sobre el dominio limitado por la curva, el teorema de Stokes relaciona la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada contenida en una superficie con la integral de otro campo vectorial asociado al primero sobre el trozo de superficie limitado por la curva.

Teorema de Stokes *Sea un trozo de superficie orientada y sin autointersecciones de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera ∂S es una curva $c(t)$ cerrada simple. Si se orienta $c(t)$ de modo que los vectores*

$c'(t)$, el vector $\vec{b}$ tangente a la superficie y ortogonal a la curva, y el vector $\vec{n}$ ortogonal a la superficie verifiquen $\langle c'(t) \wedge \vec{b}, \vec{n}\rangle < 0$, entonces, para cualquier campo vectorial X sobre $\mathbb{R}^3$ se verifica:

$$\int_S \langle \operatorname{rot} X, \vec{n}\rangle d\sigma = \oint_{\partial S} X \; dc.$$

Nota *Si X es un campo de fuerzas, $\oint_{\partial S} X \; dc$ representa el trabajo que el campo X realiza cuando puntos del espacio se mueven a lo largo de la curva ∂S. Por lo tanto, si $\oint_{\partial S} X \; dc \neq 0$, los puntos de ∂S se moverán. Si $S = \mathcal{D}$ es un disco plano, este movimiento de $\partial\mathcal{D}$ se traducirá en un giro del disco $\mathcal{D}$. Pero, por el teorema de Stokes, $\oint_{\partial\mathcal{D}} X \; dc \neq 0$ si y solo si $\int_{\mathcal{D}} \langle \operatorname{rot} X, \vec{n}\rangle d\sigma \neq 0$. Se tiene entonces que ningún disco situado en el campo de fuerzas X gira si y solo si $\operatorname{rot} X = 0$. Esta es la razón de que $\operatorname{rot} X$ se llame rotacional de X. También por esta razón, se llama giro o spin de un disco $\mathcal{D}$ de área σ y vector unitario normal $\vec{n}$ en un campo de fuerzas X a la cantidad $\langle \operatorname{rot} X, \vec{n}\rangle\sigma$*

Del teorema de Stokes volvemos a obtener (ahora solo para $\mathbb{R}^3$) el siguiente resultado que ya vimos en la sección VIII.2: *SiX es un campo conservativo y c es una curva cerrada simple de $\mathbb{R}^3$, entonces $\oint_c X \; dc = 0$.* Para demostrarlo, basta con tomar una superficie S tal que $\partial S = c$ y aplicar el teorema de Stokes, teniendo en cuenta que, por ser el campo X conservativo, $\operatorname{rot} X = 0$.

También se deduce de que $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V = 0$ que el giro de un disco en un campo conservativo es nulo.

Dejamos como ejercicio comprobar el teorema de Stokes en algunos ejemplos:

E.8.7.1 *Comprobar el teorema de Stokes para la superficie del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $0 \leq z \leq 1$ y $X = (z, x, -y)$.*

E.8.7.2 *Comprobar el teorema de Stokes para el cono dado por $z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 1$ y $X = (-y, x, 1)$.*

Bibliografía

[1] I. Anshel, D. Goldfeld: *Calculus. A computer algebra approach*, International Press Boston **1996**.

[2] T.M. Apostol :, *Calculus I y II,* Reverté, Barcelona **1989**.

[3] K. Binmore y J. Davies, *Calculus. Concepts and Methods*, Cambridge U. P. , Cambridge **2001**.

[4] A. Gray, M. Mezzino y M. A. Pinsky *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer Velrag, colección Telos, Santa Clara, California, Nueva York, Londres **1981**.

[5] J. H. Hubbard y B. Burke-Hubbard: *Vector Calculus, Linear ALgebra and Differential Forms,* Segunda edición, Prentice Hall Boca Raton, London **2002**

[6] J. Marsden y A. Weinstein *Calculus I, II y III* Springer Verlag, Nueva York **1985**

[7] M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, Routledge, Londres **2003**.

[8] S.L. Salas y E. Hills, *Calculus I y II*, Reverté, Barcelona **1994**.

[9] J. Stewart: *Cálculo : conceptos y contextos,* volumes 1, 2 and 5, Third Edition, International Thomson, Méjico, **1983**

[10] S. T. Tan: *Applied Calculus for the Managerial, Life, and Social Sciences*, 5th Edition, Thomson Learning, Belmont **2002**

[11] G. B. Thomas y R.L. Finney, *Cálculo con Geometría Analítica*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, **1987**.

Los libros [4] y [5] son de un nivel claramente superior al del curso, pero están en la bibliografía porque se han usado para algunos detalles de estos apuntes.

Apéndices

Apéndice 1

Números complejos. Fórmula de Euler

Queremos tener sobre $\mathbb{C}$ bien definidas las mismas operaciones (suma, producto, y sus opuestas: resta y cociente) que con los números reales, y con las mismas propiedades (asociativa y conmutativa para $+$ y $\cdot$, distributiva de $\cdot$ respecto de $+$, y existencia del 1 y del 0, del opuesto y del inverso). Para ello definimos:

Suma:

$(a + i\ b) + (c + i\ d) = (a + c) + i\ (b + d)$.

Producto:

$(a + i\ b)(c + i\ d) = ac + ad\ i + bc\ i + bd\ i^2 = (ac - bd) + i\ (ad + bc)$.

A partir de aquí es claro que 0 sigue siendo el 0 de $\mathbb{C}$ para la suma y 1 es la unidad de $\mathbb{C}$ para el producto. También que el opuesto de $a + i\ b$ es $-a - i\ b$. Para calcular el inverso, vamos a definir primero el complejo conjugado $\overline{z}$ de un número complejo $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{si } z = a + i\ b, \text{ entonces } \overline{z} = a - i\ b.$$

Se tiene además, aplicado la definición del producto de números complejos, que

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2,$$

por lo tanto, el inverso de z, es decir, el número por el que hay que multiplicar z para que de 1 es

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Usando esto, vamos a calcular el cociente

$$\frac{y}{z} = \frac{y \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{y \cdot \overline{z}}{|z|^2},$$

es decir

$$\frac{a + i\ b}{c + i\ d} = \frac{(a + i\ b) \cdot (c - i\ d)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + i\ \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}.$$

Una vez definido el producto, está claro como definir las potencias de un número complejo: $(a+i\ b)^n = (a+i\ b) \overset{n}{\cdots} (a+i\ b)$. En particular,

$$(a+ib)^2 = (a^2-b^2) + i\ 2ab.$$

Para definir la exponencial de potencia un número complejo, definiremos primero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \operatorname{sen}\theta, \qquad \text{(fórmula de Euler)}.$$

De aquí resultará, admitiendo que la exponencial y el logaritmo de números complejos verifican las mismas propiedades que las de los reales, que

$$e^{a+ib} = e^a\ (\cos b + i \operatorname{sen} b), \quad \text{y} \quad c^{a+ib} = e^{(a+ib)\ln c}, \text{ porque } \ln(c^{a+ib}) = (a+ib)\ln c.$$

Más adelante justificaremos parcialmente la fórmula de Euler.

Con lo que hemos visto ya tenemos elementos sobrados para comprobar que *una ecuación de segundo grado siempre tiene solución en el conjunto de los números complejos.* En efecto, dada una ecuación $a\ x^2 + b\ x + c = 0$, sabemos que sus soluciones se obtienen aplicando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}{2\ a},$$

que, como ya conocíamos, tiene solución real si $b^2 - 4\ a\ c \geq 0$, y, si $b^2 - 4\ a\ c < 0$, entonces podemos escribir $b^2 - 4\ a\ c = -\eta^2$, con lo que $\sqrt{b^2 - 4\ a\ c} = i\ \eta$, y

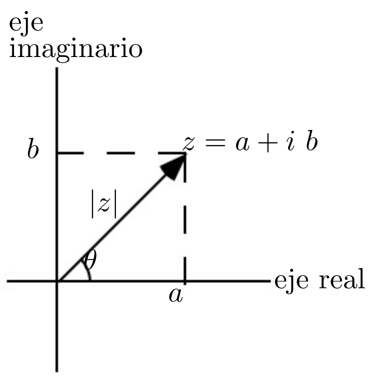
$$x = \frac{-b \pm i\eta}{2\ a} = \frac{-b}{2\ a} \pm i \frac{\eta}{2\ a},$$

donde se observa que: *si las soluciones de una ecuación de segundo grado no son números reales, entonces son dos números complejos conjugados.*

1.1 Representación gráfica

Igual que cada número real venía representado por un punto de una recta, llamada recta real, vamos a representar cada número complejo por un punto de un plano. La representación es la más natural que a uno cabe imaginar: a cada número complejo $a + i\ b$ le asociaremos el punto del plano de coordenadas (a, b). Dicho de otra manera, lo que hacemos es una identificación del conjunto $\mathbb{C}$ con el plano $\mathbb{R}^2$ mediante la aplicación

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \ \ a + i\ b \mapsto (a, b).$$



Esta representación geométrica permite también una nueva representación algebraica de un número complejo mediante el módulo y el argumento. En efecto, puesto que el número complejo z viene representado por el vector z de la figura, ahora podemos fijarnos en que ese vector está completamente determinado por su módulo ρ y por el ángulo θ que forma con el eje X o eje real. Ahora bien, aplicando el teorema de Pitágoras, observamos que el módulo de ese vector es $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, que coincide con el módulo $|z|$ del número complejo z que definimos antes. Además, el ángulo θ verifica

$$\tan\theta = \frac{b}{a}; \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Al ángulo θ se le llama argumento del número complejo $z = a + i\ b$.

Se tiene así que un número complejo puede representarse por sus partes real a e imaginaria b ($z = a + i\ b$), o por su *módulo* $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y su *argumento* θ. Usando la fórmula de Euler puede escribirse

$$z = a + i\ b = \rho \left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho}\ i \right) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho\ e^{i\theta},$$

que es la *forma polar* de escribir un número complejo.

Observemos ahora que, si no restringimos a θ que tome sus valores en $[0, 2\pi[$, se tiene que θ y $\theta + 2\pi$ son argumentos del mismo número complejo. A partir de ahora no tendremos inconveniente en aceptar que el argumento de un número complejo varía en $\mathbb{R}$ y que, por tanto, un mismo número complejo tiene distintos argumentos, pero todos ellos difieren en un múltiplo de 2π, y solo uno de ellos está en el intervalo $[0, 2\pi[$.

La representación de un número complejo en forma polar es útil para muchos cálculos, así, si $z = a + i\ b = \rho\ e^{i\theta}$,

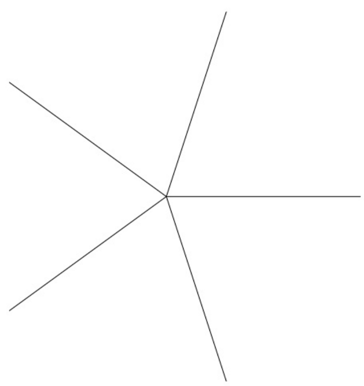
$$z^n = (a + i\ b)^n = (\rho\ e^{i\theta})^n = \rho^n\ e^{in\theta} = \rho^n(\cos n\theta + i\ \operatorname{sen} n\theta). VI.A.1$$

En particular, cuando $\rho = 1$, tenemos la fórmula de de Moivre
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\ \operatorname{sen} n\theta.$

Si $y = |y|\ e^{i\varphi}$, $z = |z|\ e^{i\theta}$, entonces
$y{\cdot}z = |y|\ |z|\ e^{i(\varphi+\theta)}; \quad \dfrac{y}{z} = \dfrac{|y|}{|z|}\ e^{i(\varphi-\theta)},$

que, geométricamente significa que el producto de dos números complejos de argumentos φ y θ da un número complejo que se encuentra en la semirrecta que forma un ángulo $\varphi + \theta$ con el eje X.

Por otro lado, la fórmula (VI.A.1) da un procedimiento para calcular las raíces de la unidad, es decir, las soluciones de la ecuación $z^n = 1$. Escribiendo z en forma polar, tenemos que la ecuación se puede escribir $|z|^n e^{in\theta} = 1$, de donde se deduce que $|z| = 1$ y $n\ \theta = 2\pi\ k$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.



raíces quintas de la unidad

(Paramos para este valor de k porque si k es mayor se vuelven a repetir los mismos números complejos, por ejemplo, si $k = n - 1 + \ell$, con $1 \le \ell < n - 1$, tenemos

$$e^{i\ 2\pi\frac{k}{n}} = e^{i\ 2\pi\frac{n-1+\ell}{n}} = e^{i\ 2\pi\frac{\ell-1}{n}}.)$$

Obsérvese que, representadas en el plano, la raíces n-ésimas de la unidad dan los vértices de un polígono regular de n lados.

De modo análogo, es posible resolver la ecuación $z^n = w$ cuando w es un número complejo, $w = |w|\ e^{i\varphi}$, con $\varphi \in [0, 2\pi[$. Como antes la ecuación se puede escribir en la forma $|z|^n e^{in\theta} = |w|\ e^{i\varphi}$, de donde se deduce que $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ y $n\ \theta = \varphi + 2\pi\ k$, con $k = 0, 1, ..., n-1$.

1.2 Otras propiedades

Otras propiedades útiles de los números complejos, y que resultan fáciles de comprobar aplicando las definiciones son:

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\quad \overline{\overline{z}} = z$, $\quad \overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$,

$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\quad \overline{-z} = -\overline{z}$,

$\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ si $z \neq 0$, $\quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\quad |z + w| \leq |z| + |w|$.

1.3 Observación

Hemos introducido los números complejos para lograr que toda ecuación de segundo grado tenga una solución (o, en otras palabras, que todo polinomio de segundo grado tenga una raíz). Podríamos pensar que, para que ecuaciones de grados sucesivos tengan solución, es necesario introducir nuevos conjuntos de números. Afortunadamente estos no es así, gracias al

Teorema fundamental del álgebra *Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (quizás repetidas o múltiples) en el conjunto de los números complejos.*

1.4 Derivación de funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Dada una función de este tipo, se puede escribir como $f(x) = \varphi(x) + i\ \psi(x)$, donde φ y *psi* son funciones reales de variable real, y se define la derivada $f'(x)$ por $f'(x) = \varphi'(x) + i\ \psi'(x)$

1.5 Una “justificación” de la fórmula de Euler

Una serie de potencias compleja es una serie de potencias de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la que $a_n \in \mathbb{C}$ para todo n. Como cada número complejo a_n se puede escribir de la forma $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, una serie de potencias compleja se puede expresar como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n.$$

Por otro lado, cuando estudiamos el desarrollo de Taylor, vimos que el desarrollo de Taylor de e^x era

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

y si, formalmente, sustituimos x por $i\theta$ en este desarrollo de taylor, obtenemos

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + i\ \theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4 4}{4!} + ... \\ &= 1 + i\ \theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + ... \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...\right), \end{aligned}$$

y, si comparamos con los desarrollos de Taylor del seno y del coseno que ya conocemos, obtenemos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

la fórmula de Euler.

Ejercicios

1. Representa gráficamente, y escribe en forma polar, los números complejos:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Sea

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Calcula $f(5+4i)$ y $f(5-4i)$.

3. Calcula el módulo de los siguientes números:

$$(x + i\ y)^n, \qquad \frac{(x+i\ y)^n}{(x-i\ y)^n}.$$

4. Elige tres números complejos y multiplícalos por i. Representa gráficamente esos números y su producto por i. ¿Puedes intuir algún significado geométrico de la multiplicación por i?. Haz el mismo ejercicio para la división por i.

5. Calcula

$$\sqrt[5]{8 + 6\ i}, \qquad (-1)^{\frac{1}{5}}, \qquad \sqrt[3]{64\ i}, \qquad \sqrt[6]{3\sqrt{3} + 4\ i}.$$

6. Resuelve las ecuaciones

$$x^3 = 8, \quad x^3 - 10\ i = 0, \quad x^3 - 1 = 0, \quad x^4 - 1 = 0,$$

$$x^5 - 1 = 0, \quad x^6 - 1 = 0, \quad x^6 - 2x^3 + 2 = 0.$$