Práctica 10. Problemas de optimización

1. Determina los máximos, mínimos y puntos de silla de las siguientes funciones, y calcula también el valor de la función en esos puntos:

   a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$,

   b) $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y$,

   c) $f(x, y) = x^2 + xy$,

   d) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

   e) $f(x, y) = x \sin y$.

2. Encontrar la distancia más corta entre el punto $(1, 1, 2)$ y el plano $2x - y + 3x = 2$.

3. Minimizar la función $2x^2 + 3y^2$ sujeta a la ligadura $3x + 4y = 1$.

4. ¿Qué punto de la hipérbola $xy = 5$ minimiza la función $3x + 2y$?.

5. Encontrar el punto de la esfera $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$ que está más lejos del punto $(1, 2, 3)$.

6. Determinar los máximos y mínimos absolutos de la función $3x - y + 4z$ definida sobre el conjunto $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

7. Determina los máximos, mínimos absolutos de las siguientes funciones en los dominios dados:

   a) $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en la placa triangular cerrada y acotada per las rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer cuadrante.

   b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$, en la placa triangular cerrada y acotada per las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$ en el primer cuadrante.

   c) $f(x, y) = (x^2 - 4x)\cos(y)$, en la región $1 \leq x \leq 3$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

8. Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluida la frontera $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en un punto arbitrario (x, y) es

   $$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

   Determina los puntos más calientes y más fríos de la placa, así como su temperatura.

   Problemas de optimización en medio ambiente

9. Se quiere construir una pista forestal que vaya desde un punto P situado en el interior de un bosque de abetos a la carretera que lo rodea. Encontrar la trayectoria que minimiza el impacto ambiental. A la vista de los planos (y después de aplicar esplines para aproximar la ecuación de la carretera por un polinomio), podemos situar el punto P en el origen y la frontera del bosque (carretera) se puede describir mediante la ecuación $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

10. Una empresa tiene tres sucursales situadas en los puntos del plano $(0,0)$, $(2,2)$ y $(-2,2)$. Según la Agencia Europea de Medio Ambiente, se prevee un aumento global de las emisiones de CO_2 provinientes del sector del transporte del 40% para el año 2010, con relación al año 1990. Con el objetivo de reducir el consumo energético de los vehículos y las emisiones de CO_2, se quiere construir un centro de distribución de mercaderías de tal manera que la suma de las distencias al cuadrado del centro de distribución a cada sucursal sea mínima. ¿En qué punto se ha de construir este centro?.

11. Una empresa tiene centros de producción en las poblaciones P y Q y almacenes en las poblaciones A, B y C. Las distancias en kilómetros entre estas ciudades vienen dadas por la siguiente tabla El centro P produce 800 toneladas anuales y el centro Q produce 500 toneladas

	A	B	C
P	40	110	190
Q	170	100	150

anuales. Las capacidades de los almacenes son: 400 toneladas el A, 600 toneladas el B y 300 toneladas el C. ¿Cómo se ha de transportar la producción para minimizar los costes de transporte y reducir, por tanto, el consumo energético de los vehículos y sus emisiones de CO_2.