# Ejemplo de examen de segundo parcial de FMEMA cursos 2005-2006 y 2006-2007

1. **(a)** Define los conceptos de máximo y mínimo condicionado para una función de varias variables. Da una condición necesaria para qque una función diferenciable tenga un máximo o un mínimo condicionado en un punto.

   **(b)** Determina los máximos y mínimos función $xy + y^2$ sujeta a la ligadura $x^2 + y^2 = 1$

2. **(a)** ¿De qué partes de las Matemáticas de este segundo parcial hemos visto ejemplos (problemas) de aplicaciones al medio ambiente?.

   **(b)** ¿A qué tipos de problemas de medio ambiente correspondían éstas aplicaciones?

3. **(a)** ¿Cuántos tipos de ecuaaciones diferenciales (además de las lineales de segundo orden) hemos visto en este curso?. ¿Qué métodos de solución hemos dado para cada una de ellas? (esta segunda pregunta no iría tan completa, sino que se referiría a describir algún método concreto).

   **(b)** Invéntate una ecuación diferencial de variables separables y resuélvela.

4. a) Explica como calcular los máximos y mínimos de una función $f(x, y, z)$ sujeta a la condición $g(x, y, z) = c$, siendo $f$ y $g$ funciones diferenciables.

   b) Dada la función $f(x, y) = xy^2 - 2y^2$, determina los valores máximo y mínimo absolutos en el dominio $4x^2 + y^2 \leq 9$.

5. a) Explica como calcular los máximos y mínimos absolutos de una función $f(x, y)$ definida sobre un dominio del plano limitado por una curva de nivel $g(x, y) = c$, siendo $f$ y $g$ funciones diferenciables.

   b) Dada la función $f(x, y) = (x - y)^2$, determina los valores máximo y mínimo relativos en el conjunto de los puntos $(x, y)$ del plano que verifican la ecuación $4x^2 + y^2 = 9$.

6. a) Da una condición necesaria para que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto de $\mathbb{R}^n$. ¿Qué es un punto silla de $f$?. Da una condición suficiente para que un punto crítico de $f$ sea un punto silla.

   b) Encuentra los máximos y mínimos relativos y puntos silla las funciones

   $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 - z^2 - 2\ x\ y$ y $g(x, y, z) = -x^2 + y^2 - z^2 - 3\ x\ y$

7. (a) ¿Qué ecuaciones diferenciales de segundo orden son reducibles a una de primer orden?, ¿cómo se hace para resolver estas ecuaciones?.

(b) Encuentra la solución de la ecuación diferencial

$$x\ y' = y + x\ e^{-\frac{y}{x}}.$$

que verifica la condición inicial $y(1) = 0$.

8. **(a)** Da la definición de integral curvilínea de un campo vectorial. Define el concepto de campo conservativo. Demuestra que la integral de línea de un campo conservativo depende solo de los extremos de la curva a lo largo de la cual se hace la integral.

   **(b)** Averigua si el campo vectorial $X = (xy^2, x^2y, z^2)$ es conservativo. Caso de que lo sea, calcula su potencial.

9. a) Da la definción de integral $\int_a^b f(x)\ dx$ de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. ¿Qué relación tiene con la primitiva de $f$?.

   b) Dadas la funciones $f(x) = x^2 - x$, y $g(x) = 3x - 3$, obtener el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$.

10. a) Da la definción de integral $\int_D f(x, y)\ dx\ dy$ de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un dominio $D$ de $\mathbb{R}^2$. Describe la regla de Fubini para calcular una integral doble. Para el caso de una integral doble sobre un dominio de la forma $[a, b] \times [c, d]$, da una idea de porqué la regla de Fubini es razonable.

    b) Resuelve el problema del apartado 9(b) utilizando una integral doble.

11. a) ¿Cuál es la regla del cambio de variable en una integral múltiple?

    b) Aplícala al cálculo de las integrales $\displaystyle\int_D (3x + y)dx\ dy$ y $\displaystyle\int_\Omega (3x + y)dx\ dy\ dz$, siendo $D = \{(x, y); x^2 + y^2 le 1\}$ y $\Omega = \{(x, y, z); (x - 3)^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4\}$.

12. a) ¿Qué es un campo conservativo?. Da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial definido sobre un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^3$ (respectivamente, en $\mathbb{R}^2$) sea conservativo.

    b) Calcula $\displaystyle\oint_c X dc$ en los siguientes casos:

    b1) $X = (x^2, y, xy)$, $c(t) = (2\cos^2 t, \cos t \mathrm{sen} t, \mathrm{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

    b2) $X = (yz, xz, xy)$, $c(t) = (2\cos^2 t, \cos t \mathrm{sen} t, \mathrm{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

    ¿Es conservativo alguno de los campos vectoriales anteriores?. Si alguno de ellos lo es, calcular el potencial del que deriva.