

Examen final de FMEMA 15 junio 2009

1. a) ¿Qué es el límite de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuando $x \rightarrow a$, siendo $a \in \mathbb{R}$? ¿Qué relación hay entre los conceptos de límite y continuidad?

b) Calcula los siguiente límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 7}{4x^4 - 3x^2 + 6}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 7}{4x^4 - 3x^2 + 6}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{4x}.$$

2. a) Define el producto vectorial de dos vectores y da sus propiedades más importantes.

b) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial definido por las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} -x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -10y + 8z = 0 \end{array} \right\} ?$$

Justifica la respuesta y encuentra una base de ese espacio vectorial.

3. a) Define el gradiente para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Da dos interpretaciones de este concepto (una de tipo geométrico, y otra de tipo variacional).

b) Calcula la diferencial de la función $f(x, y, z) = (\cos(xy^2), \ln(x - z))$ y su derivada direccional en la dirección del vector $(1, 1, 0)$ en el punto $(1, 0, 0)$.

4. a) Explica como calcular los máximos y mínimos absolutos de una función $f(x, y)$ definida sobre un dominio del plano formado por los puntos del plano que verifican $g(x, y) \leq c$, siendo f y g funciones diferenciables.

b) Dada la función $f(x, y) = x^2 - 2y^2$, determina los valores máximo y mínimo en el conjunto $9x^2 + 4y^2 \leq 16$.

5. (a) ¿Qué es una ecuación diferencial de orden 3?, ¿de cuántas constantes arbitrarias o parámetros depende la solución general de una ecuación diferencial de orden 3?, ¿cuántas condiciones iniciales son necesarias para que una ecuación diferencial de orden 3 tenga solución única?, ¿de qué tipo son esas condiciones iniciales?

b) Da la solución de la ecuación diferencial $y' = xy + x$ que verifica la condición inicial $y(0) = 1$

6. a) Define la integral de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$. Explica en que consiste la regla de Fubini para calcular una integral como esa.

b) Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

Examen Segundo Parcial de FMEMA 15 junio 2009

Responder sólo a 5 preguntas a elegir de entre las 7 propuestas

1. a) Explica, para una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, qué son los máximos y mínimos absolutos y qué los máximos y mínimos relativos y como se calculan.
b) Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$, encontrar sus máximos y mínimos relativos y, si los tiene, los máximos y mínimos absolutos (y, si no los tiene, decir por qué).
2. a) Explica como calcular los máximos y mínimos absolutos de una función $f(x, y)$ definida sobre un dominio del plano formado por los puntos del plano que verifican $g(x, y) \leq c$, siendo f y g funciones diferenciables.
b) Dada la función $f(x, y) = x^2 - 2y^2$, determina los valores máximo y mínimo en el conjunto $9x^2 + 4y^2 \leq 16$.
3. (a) ¿Qué es una ecuación diferencial de orden 3?, ¿de cuántas constantes arbitrarias o parámetros depende la solución general de una ecuación diferencial de orden 3?, ¿cuántas condiciones iniciales son necesarias para que una ecuación diferencial de orden 3 tenga solución única?, ¿de qué tipo son esas condiciones iniciales?
b) Da la solución de la ecuación diferencial $y' = xy + x$ que verifica la condición inicial $y(0) = 1$
4. (a) Hay dos conceptos de integral de una función de una variable. Uno de ellos puede considerarse como un caso particular de una ecuación diferencial. ¿Cuál?. Explica por qué.
b1) Obtener la solución general de la ecuación $y'' + 5y' + 4y = x$,
b2) y la solución de la ecuación anterior que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. a) Define la integral de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$. Explica en que consiste la regla de Fubini para calcular una integral como esa.
b) Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.
6. a) Da la fórmula del cambio de variable para la resolución de integrales sobre dominios de \mathbb{R}^2 .
b) Calcula la integral $\int_D (3x^2 - y) dx dy$ en el dominio $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$.
7. a) Define la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva. ¿Qué es un campo conservativo?
b) Dado el campo vectorial $X(x, y, z) = (-z, 2y, -x)$. ¿es conservativo?. Calcula su integral a lo largo de la curva $c(t) = (t - t^2, t + t^2, t)$ para $t \in [0, 1]$. Si es conservativo, obtener su potencial.