## Coincidències. Fórmula d'inclusió-exclusió (1)

La fórmula d'inclusió és la generalització de la ben coneguda expressió $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i ens permet calcular la probabilitat per a una unió finita d'esdeveniments qualsevol $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

## Coincidències. Fórmula d'inclusió-exclusió (2)

Si $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n), \end{aligned}$$

## Coincidències. Fórmula d'inclusió-exclusió (3)

Aplicada al nostre problema, si $A_i$ designa l'esdeveniment $\{$*al lloc* i *hi ha una coincidència*$\}$, l'esdeveniment $A$ representará $\{$*hi ha hagut alguna coincidència en la permutació dels* $n$ *enters*$\}$.

L'esdeveniment que realment ens interessa a nosaltres és $A^c$.

## Coincidències. Fórmula d'inclusió-exclusió (4)

Observem que

$$
\begin{aligned}
P(A_i) &= \frac{(n-1)!}{n!} \\
P(A_i \cap A_j) &= \frac{(n-2)!}{n!} \\
P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) &= \frac{(n-m)!}{n!}
\end{aligned}
$$

## Coincidències. Fórmula d'inclusió-exclusió (5)

D'on deduïm

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \binom{n}{1}\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!} \\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

## Coincidències. Fórmula d'inclusió-exclusió (6)

Una aproximació al resultat quan *n* és gran pot trobar-se fent ús del desenvolupament en serie de potències de $e^x$. Si escrivim $A[n]$ en lloc d'$A$,

$$\lim_n P(A[n]) = 1 - e^{-1}$$

$$\lim_n P(A^c[n]) = e^{-1} = 0{,}3688.$$

## Coincidències. Fórmula d'inclusió-exclusió (7)

Paga la pena pegar-li una ullada a la taula i comentar-la.

| $\mathbf{n}$ | $\mathbf{P}(\mathbf{A^c}[\mathbf{n}])$ | $\lvert\mathbf{e^{-1}} - \mathbf{P^c}(\mathbf{A}[\mathbf{n}])\rvert$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.50000000 | 0.13212056 |
| 3 | 0.33333333 | 0.03454611 |
| 4 | 0.37500000 | 0.00712056 |
| . | ... | ... |
| 9 | 0.36787919 | 0.00000025 |
| 10 | 0.36787946 | 0.00000002 |