Coincidències. Probabilitat condicionada (1)

Suposarem que l'enunciat és el que fa referència al convidats a la festa, que en eixir trien el barret a l'atzar. Digam-li $p_n = P(A^c)$ a la probabilitat de que cap dels convidats recull el seu barret. Anem a emprar un esdeveniment auxiliar

$$C = \{\textit{el primer convidat recull el seu propi barret}\}$$

Coincidències. Probabilitat condicionada (2)

Tindrem aleshores

$$
\begin{aligned}
p_n = P(A^c) &= P(A^c|C)P(C) + P(A^c|C^c)P(C^c) \\
&= 0 \times P(C) + P(A^c|C^c)\frac{n-1}{n} \\
&= P(A^c|C^c)\frac{n-1}{n}.
\end{aligned}
$$

Coincidències. Probabilitat condicionada (3)

L'esdeveniment $A^c|C^c$ representa el fet de que no hi hagen coincidències quan $n-1$ convidats recullen aleatòriament $n-1$ barrets, entre els quals hi ha un d'*estrany* que no pertany a cap d'ells, la qual cosa vol dir que hi ha un convidat que no té el seu barret entre els $n-1$.

Observem que $A^c|C^c$ pot ocurrir perquè

1. no hi han coincidències i el convidat sense barret *no* ha triat el barret *estrany*, o
2. no hi han coincidències i el convidat sense barret *sí* ha triat el barret *estrany*.

Coincidències. Probabilitat condicionada (4)

La probabilitat de la primera de les opcions es precisament p_{n-1} porque podem suposar que el barret *estrany* no ho és i en aquest cas les condicions són inicials però amb $n-1$ individus. La segona opció té una probabilitat $p_{n-2}/(n-1)$. En definitiva,

$$p_n = \frac{n-1}{n}\left(p_{n-1} + \frac{1}{n-1}p_{n-2}\right) = \frac{n-1}{n}p_{n-1} + \frac{1}{n}p_{n-2}$$

o també

$$p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2}).$$

Coincidències. Probabilitat condicionada (5)

Per a obtenir el valor de p_n observem que $p_1 = 0$ i $p_2 = 1/2$, i per recurrència

$$p_3 - p_2 = -\tfrac{1}{3}(p_2 - p_1) = -\tfrac{1}{3!} \qquad p_3 = \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!}$$

$$p_4 - p_3 = -\tfrac{1}{4}(p_3 - p_2) = \tfrac{1}{4!} \qquad p_4 = \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!}$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots$$

$$p_n = \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} - \cdots + (-1)^{n+1}\tfrac{1}{n!}$$

Coincidències. Exactament k barrets (1)

La probabilitat de l'esdeveniment $A_k =\{$*exactament* k *convidats recullen el seu barret*$\}$ pot calcular-se emprant un raonament semblant. Fixem k individus, i siguen $B_k =\{$*aquests* k *convidats trien els seus barrets*$\}$ i $C_{n-k} =\{$*per als altres* $n-k$ *convidats no hi cap coincidència*$\}$.

L'esdeveniment $C_{n-k}|B_k$ representa el fet que per als altres $n-k$ convidats no hi cap coincidència tot i que trien entre els sues propis barrets.

Coincidències. Exactament k barrets (2)

Observem que

$$P(A_k) = \sum P(B_k \cap C_{n-k}) = \sum P(C_{n-k}|B_k)P(B_k)$$

on sumem per a totes les formes de triar els k convidats i on

$$P(B_k) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

i

$$P(C_{n-k}|B_k) = p_{n-k}.$$

Coincidències. Exactament k barrets (3)

Com els k individus poden ser triats de $\binom{n}{k}$ formes diferents, l'expressió final de $P(A_k)$ és

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \cdot p_{n-k} = \frac{p_{n-k}}{k!} \\ &= \frac{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}}{k!}. \end{aligned}$$