La primitiva. Comprovació del desconfiat (1)

Digam per començar que el que pensa el nostre *desconfiat* té fonament. Si considerem 18 setmanes, per exemple, això fa un total de 108 extraccions (18×6), una mica més del doble de 49. Té dret a pensar que, uns per altres, els números degueren haver aparegut un parell de vegades cadascun. O no?

Per a traure'l de dubtes el que anem a fer és calcular la probabilitat de que els 49 números hagen aparegut al llarg de les 18 setmanes o, en general, de n setmanes.

La primitiva. Comprovació del desconfiat (2)

Fixem-nos en l'esdeveniment A_i={*el número* i *no ha aparegut en els* n *sorteigs*}. Com que els sorteigs són independents els uns dels altres,

$$P(A_i) = p = \left[\frac{\binom{48}{6}}{\binom{49}{6}}\right]^n = \left[\frac{43}{49}\right]^n$$

L'esdeveniment definit mitjançant $A = \cup_{i=1}^{49} A_i$ representa {*algun dels 49 números no ha aparegut en els* n *sorteigs*}.

La primitiva. Comprovació del desconfiat (3)

La fórmula de inclusió-exclusió ens permet calcular la seua probabilitat,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{49} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq 49} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1\leq i<j<k\leq 49} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{49}) \end{aligned}$$

La primitiva. Comprovació del desconfiat (4)

Les probabilitats que apareixen en la fórmula anterior valen

$$
\begin{aligned}
P(A_i) &= \left[\frac{\binom{48}{6}}{\binom{49}{6}}\right]^n = \left[\frac{43}{49}\right]^n \\
P(A_i \cap A_j) &= \left[\frac{\binom{47}{6}}{\binom{49}{6}}\right]^n = \left[\frac{43 \times 42}{49 \times 48}\right]^n \\
P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) &= \left[\frac{\binom{49-m}{6}}{\binom{49}{6}}\right]^n, \quad m \leq 43 \\
&= \left[\frac{43 \times 42 \times \ldots \times (43-m+1)}{49 \times 48 \times \ldots \times (49-m+1)}\right]^n .
\end{aligned}
$$

La primitiva. Comprovació del desconfiat (5)

Recordem, però, que l'esdeveniment que ens interesa és A^c.
La taula ens mostra el valor $P(A^c)$ per a diferents valors d'n.

	n=9	n=18	n=27
$P(A^c)$	0.0000	0.0032	0.2118

La primitiva. Comprovació del desconfiat (6)

Aquestes probabilitat ens van a permetre ara comprovar si, com afirma la LAE, els sorteigs de La Primitiva, Bonoloto i Gordo de La Primitiva compleixen amb la independència i la equiprobabilitat.

La LAE te una adreça d'Internet,

http://onlae.terra.es/primitiva.htm

de la que és possible obtenir tota la informació relativa als sorteigs que s'han fet des de que el joc es va implantar a l'octubre de 1985. Aquesta informació ens pot ser d'utilitat a l'hora de verificar el que dèiem.

La primitiva. Comprovació del desconfiat (7)

Des d'el 17 d'octubre de 1985 fins al 12 d'octubre de 2003 s'han fet 5214 sorteigs de La Primitiva, Bonoloto i Gordo de La Primitiva.

Hem agrupat els sorteigs en grups de 27, perquè les probabilitats en el cas de 9 o 18 setmanes són massa baixes per al número de sorteigs que estem manegant.

El número total de grups de 27 sorteigs és de 193 amb un reste de 3 que rebutgem. Associada als 193 grups podem definir una variable N, que compte el total de grups en els que al llarg dels 27 sorteigs han aparegut els 49 números del joc. Analitzats tots els resultats hem trobat que $N = 36$.

La primitiva. Comprovació del desconfiat (8)

Si les hipòtesis d'*independència* i *equiprobabilitat* són certes, la distribució de probabilitat de la variable aleatòria N és coneguda, $N \sim Bi(n, p_{27})$, amb $n = 193$ i $p_{27} = 0{,}2118$. La pregunta que podem fer-se és si el valor observat, $N = 36$, és compatible amb aquestes hipòtesis.

La resposta ens obliga a fer un contrast d'hipòtesis. Les pases a seguir són:

La primitiva. Comprovació del desconfiat (9)

1. definir, a partir de l'observació feta, l'esdeveniment $A = \{N \leq 36\}$ ={*s'observen valors menors o iguals que 36*},

2. obtenir $p = P(A)$ suposades certes les hipòtesis que hem fet, que denominarem *hipòtesi nul·la*, H_0,

3. comparar aquesta probabilitat amb un llindar menut establert a priori, al que denominem *nivell de significació* i designem mitjançant α, i

   - *acceptem* H_0 si $p > \alpha$, o
   - *rebutgem* H_0 si $p \leq \alpha$.

La primitiva. Comprovació del desconfiat (10)

En el nostre cas,

$$p = P(N \leq 36) = \sum_{k=0}^{36} \binom{193}{k} (0{,}2118)^k (1-0{,}2118)^{1-k} = 0{,}2224$$

que és un valor gran i, en qualsevol cas, major que l'habitual per a $\alpha = 0{,}05$. No hi ha per tant incompatibilitat entre el que hem observat i el que hem suposat i acceptem H_0.