Coincidències. La solució de Montmort (1)

Raona Montmort per a un permutació aleatòria dels 13 primer enters. El raonament val igual per a n i així ho farem.

Un *punt fixe* en la permutació significa que número i cardinal coincideixen. Digam-li ω_n al número de permutacions dels n primers enters sense punts fixes (Montmort li diu *derangement* a aquest tipus de permutació). És clar que $\omega_1 = 0$ i $\omega_2 = 1$.

Coincidències. La solució de Montmort (2)

Per a $n \geq 3$, prenem un d'aquells *derangements* i siga k l'enter que ocupa el primer lloc. És segur que $k \neq 1$. D'acord amb la posició que ocupe l'1 podem establir en ω_n la següent partició:

1. aquells *derangements* on l'1 ocupa la posició k, i
2. aquells on l'1 ocupa qualsevol altra posició.

Coincidències. La solució de Montmort (3)

Pel que fa a

les primeres, si prescindim d'1 i de k, els altres $n-2$ enters poden formar ω_{n-2} *derangements*,

les segones, el conjunt d'enters $\{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$ ocupen les $n-1$ posicions de la 2 a la n, amb l'única restricció de que l'1 no pot estar en la posició k. El número de posibles arreglos d'aquest tipus és ω_{n-1}.

Com que k pot prendre $n-1$ valors, tindrem

$$\omega_n = (n-1)\omega_{n-1} + (n-1)\omega_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Coincidències. La solució de Montmort (4)

D'on fàcilment deduïm

$$\omega_n = n\omega_{n-1} + (-1)^n.$$

La probabilitat de que no hi haja cap *punt fixe* o *coincidència* valdrà $p_n = \omega_n/n!$ i es verifica

$$p_n - p_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

d'on finalment

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$