Tema 2.- Análisis de circuitos de corriente alterna

2.1 Introducción

En el tema anterior se ha supuesto que los generadores suministran una diferencia de potencial entre sus extremos que no varia en el tiempo. En consecuencia la intensidad de la corriente que circula por cualquier elemento del circuito tampoco depende del tiempo, esto es, el valor numérico así como el sentido de circulación es constante. Este tipo de corriente se denomina corriente continua. Existen generadores cuya diferencia de potencial varia con el tiempo y por lo tanto suministran una corriente que también varia con el tiempo. Ahora bien, esta variación puede ser solo en el módulo de la intensidad o también en el sentido de la circulación de la corriente (sentido de movimiento de la carga eléctrica). Cuando la intensidad de la corriente varia en el tiempo pero circula siempre en el mismo sentido, se tiene una corriente continua variable y cuando se tiene una intensidad que varia o "alterna " el sentido de circulación se tiene una corriente alterna. Estos conceptos se reflejan en las figuras siguiente donde se representa la fem. del generador en función del tiempo (la intensidad de la corriente que suministra el generador puede tener la misma forma que la fem. o parecida dependiendo del circuito al que se conecte el generador).

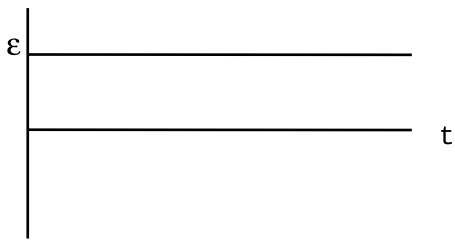


Figura 1-a

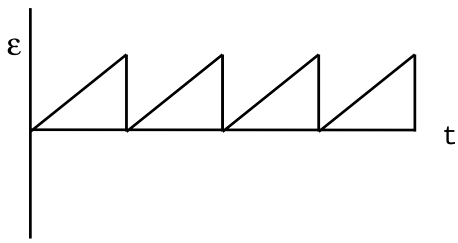


Figura 1-b

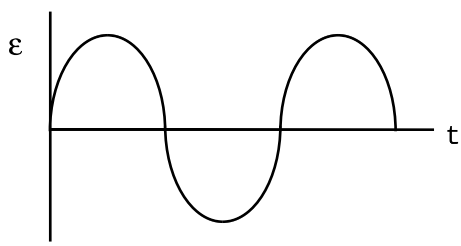


Figura 1-c

Para los valores positivos de ε, los bornes del generador conservan siempre la misma polaridad que la que se indique en el circuito correspondiente, mientras que los valores negativos indican una polaridad contraria. Así pues, para valores positivos de ε, la intensidad de corriente circulará en un sentido determinado por los polos del generador (del positivo al negativo). Para valores negativos de ε, la polos del generador cambian de signo y la intensidad circula en sentido contrario.

La figura 1.a representa una corriente continua constante: tanto la intensidad como el sentido de circulación es constante en el tiempo.

La figura 1.b representa una corriente continua variable: la intensidad varia en el tiempo pero la carga eléctrica (la intensidad) circula siempre en el mismo sentido.

La figura 1.c representa una corriente alterna: tanto la intensidad como el sentido de movimiento de la carga varia con el tiempo.

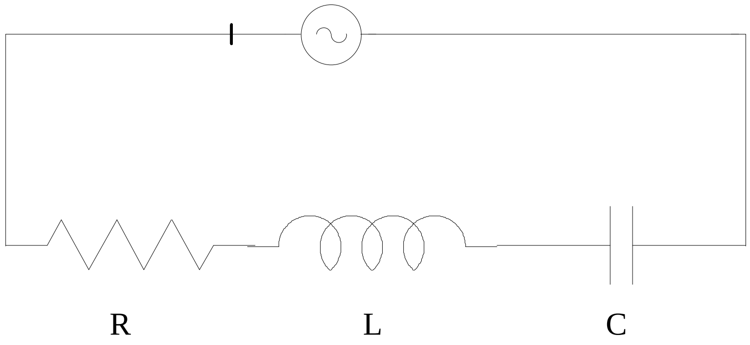
Otra forma de denominar las corrientes es según la forma de la gráfica de la fem. del generador en función del tiempo (la intensidad que suministra este generador suele tener la misma forma aunque desplazada en el eje de tiempos). Así la gráfica 1.b será una corriente continua en diente de sierra. La gráfica 1.c será una corriente alterna sinuosoidal.

En el presente tema se estudiara exclusivamente la corriente alterna sinuosoidal.

2.2 Circuito serie RLC

En los circuitos alimentados con un generador de corriente alterna sinuosoidal pueden aparecer dos elementos nuevos que en corriente continua no existían: el condensador y la bobina. El circuito típico consiste en la conexión serie de una resistencia un condensador y una bobina, y a partir de él se puede explicar el procedimiento matemático empleado en cualquier otro tipo de circuitos formados por combinaciones serie y paralelo de estos tres elementos. El circuito serie RLC se representa en la figura 2 y la fem. del generador es $\varepsilon(t) = \varepsilon_o \cos(\omega t + \phi)$.

$\varepsilon(t) = \varepsilon_o \cos(\omega t + \phi)$.



En este circuito se cumple también que la fem. del generador es igual a la suma de las diferencias de potencial en todos los elementos. La ddp en un condensador es igual a la carga acumulada en su placa positiva dividida por la capacidad, la ddp en los bornes de una bobina es (según Lenz-Faraday) la derivada de la corriente que la atraviesa respecto del tiempo multiplicada por el coeficiente de autoinducción y la ddp en una resistencia es el producto de la resistencia por la intensidad. Así se tiene:

$$\varepsilon(t) = L\frac{dI(t)}{dt} + I(t)R + \frac{Q}{C} \qquad (2.1)$$

Si derivamos (2.1) respecto del tiempo tendremos que el tercer sumando es la corriente del circuito I(t)=dQ/dt con lo cual

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} \qquad (2.2)$$

La resolución de la ecuación diferencial (2.2) es bastante engorrosa y larga si se realiza con funciones trigonométricas. En cambio si se emplea variable compleja se simplifica. Para ello definiremos una fem compleja eficaz ε que tendrá de módulo $|\varepsilon| = \varepsilon_0/\sqrt{2}$ y cuya fase (o argumento) sera ϕ, esto es

$$\varepsilon = |\varepsilon| e^{j\phi} = |\varepsilon|(\cos\phi + j\operatorname{sen}\phi) = |\varepsilon| \qquad (2.3)$$

Con esta definición, la fem temporal $\varepsilon(t)$ tendrá por expresión:

$$\varepsilon(t) = |\varepsilon|\sqrt{2}\ \cos(\omega t + \phi) = \varepsilon_o \cos(\omega t + \phi). \qquad (2.4)$$

y además definiremos la impedancia de cada elemento del circuito $Z_R=R$, $Z_C=-j/C\omega$ y $Z_L = L\omega j$. De este modo se pueden emplear los mismos procedimientos que en corriente continua para resolver circuitos. En concreto, para el circuito serie de la figura 2, como los tres elementos están en serie, la impedancia total será la suma de las tres impedancias y la intensidad de la corriente se obtendrá aplicando la ley de Ohm:

$$I = \frac{\varepsilon}{Z_{total}} \qquad\qquad I = \frac{|\varepsilon| e^{j\phi}}{R + L\omega j - \dfrac{j}{C\omega}} \qquad (2.5)$$

Al realizar la operación indicada de (2.5) se obtendrá una corriente compleja que tendrá módulo $|I|$ y argumento ϕ_I. Este complejo se puede escribir de la misma manera que se ha hecho con el complejo fem eficaz

$$I = |I| e^{j\phi_I} = |I| (\cos\phi_I + j \,\mathrm{sen}\,\phi_I) = |I| \qquad (2.6)$$

Entonces, la verdadera intensidad de la corriente que circula por el circuito (en función del tiempo) se calculará siguiendo el procedimiento inverso al empleado al pasar la fem temporal del generador a la forma comleja eficaz: Se multiplica el módulo de la intensidad por $\sqrt{2}$ y se añade la fase ϕ_I en el coseno temporal:

$$I(t) = |I|\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_I) \qquad (2.7)$$

<u>2.3 Resolución de un circuito cualquiera alimentado con un generador de corriente alterna sinusoldal.-</u>

Dado un circuito formado por resistencias, condensadores y autoinducciones (bobinas) conectados de forma arbitraria, y alimentado por un generador de corriente alterna sinusoidal de fuerza electromotriz $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \phi)$, para obtener la corriente que circula por cualquier de las ranias del circuito y calcular la ddp entre dos puntos cualquiera del núsmo circuito procederemos del siguiente modo:

Asignaremos al generador de alterna, una fem compleja eficaz cuyo módulo será la amplitud (o valor de pico) de la fem ε(t) dividida por $\sqrt{2}$, y cuya fase será el segundo sumando del argumento de la función trigonométrica coseno, esto es:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o \cos(\omega t + \phi). \Rightarrow \ \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} e^{j\phi} = |\varepsilon| e^{j\phi} = |\varepsilon| \qquad (2.8)$$

Asignaremos a los tres elementos típicos que forma el circuito de corriente alterna, impedancias complejas definidas del siguiente modo:

$$Z_R=R, \qquad Z_C=-j/C\omega \quad \text{y} \quad Z_L = L\omega j \qquad (2.9)$$

Se aplicaran los mismos procedimientos que en circuitos de corriente continua: Lemas de Kirchoff, método de mallas, asociación de impedancias en serie y en paralelo, ete. Así se obtendrán valores complejos para las intensidades de corriente que circulan por las ramas y para las diferencias de potencial entre puntos del circuito. Dichos valores complejos se podrán reescribir en función (trigonométrica) del tiempo, siguiendo el procedinúento inverso al seguido para obtener la fem compleja del generador: se calcula el módulo y la fase de cada magnitud compleja. Se multiplica el módulo por $\sqrt{2}$, y se añade la fase dentro del argumento de la función coseno. Esto es, si la corriente que circula por una impedancia es $I = |I| e^{j\phi_i}$ y la ddp entre sus extremos es $V = |V| e^{j\phi_v}$, las correspondientes expresiones de la intensidad de la corriente y la ddp, en función del tiempo, serán

$$I(t) = |I|\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_I) \qquad V(t) = |V|\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_v) \tag{2.10}$$

Los valores $|I|$ *y* $|V|$ son los valores eficaces de las magnitudes complejas Intensidad de corriente que circula por una impedancai y Ddp entre los extrmos de la impedancia, y los valores $I_0 = |I|\sqrt{2}$ y $V_0 = |V|\sqrt{2}$ son respectivamente los valores de pico de la intensidad que circula por la impedancia y la ddp entre sus extremos.

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I) \qquad V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v) \tag{2.11}$$

Los aparatos que se emplean para medir la intensidad de corriente y la ddp entre dos puntos de un circuito cualquiera alimentado con un generador de corriente altema, están construidos para medir el valor eficaz de las correspondientes magnitudes En otras palabras: *los aparatos de medida en corriente alterna miden el módulo de la magnitud correspondiente*

2.4 Trabajo y Potencia en corriente alterna-

Si existe una diferencia de potencial entre los extremos de una impedancia $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ y está recorrida por una corriente $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, se disipa un trabajo en dicha impedancia, que viene dada por la ley de Joule, lo mismo que en continua. El trabajo disipado en la impedancia al cabo de un cierto tiempo t, será

$$W = \int_0^t I(t)V(t)dt = \int_0^t I_0 \cos(\varpi t + \phi_I) V_0 \cos(\varpi t + \phi_v) dt \tag{2.12}$$

Para realizar esta integral supondremos que el tiempo total t es muchísimo mayor que el periodo T de la corriente alterna con lo cual podremos descomponerlo en un número entero de periodos *NT* mas un pequeño intervalo de tiempo Δt que se podrá despreciar, con lo que

$$W = \int_0^{NT} I_0 \cos(\varpi t + \phi_I) V_0 \cos(\varpi t + \phi_v) dt = N \int_0^{T} I_0 \cos(\varpi t + \phi_I) V_0 \cos(\varpi t + \phi_v) dt \tag{2.13}$$

y resolviendo la integral se llega a la expresión del trabajo consumido en la impedancia

$$W = \frac{NT}{2} I_0 V_0 \cos(\phi_V - \phi_I) \qquad (2.14)$$

Puesto que <u>NT</u> *es* el tiempo total en que se está consumiendo trabajo, la potencia disipada por la impedancia será

$$P = \frac{W}{NT} = \frac{I_0 V_0}{2} \cos(\phi_V - \phi_I) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi_V - \phi_I) \qquad (2.15)$$

y recordando la expresión de los valores eficaces de la corriente y la tensión, introducidos en la pregunta anterior, $|I| = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ y $|V| = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ se tendrá finalmente:

$$P = |I||V| \cos(\phi_V - \phi_I) \qquad (2.16)$$

Esta expresión es muy parecida a la obtenida en corriente continua, salvo el factor cos (ϕ_V - ϕ_I). Este factor se denomina factor de potencia de la impedancia. Recordando la ley de Ohm aplicada a una impedancia

$$I = \frac{V}{Z} \qquad \Rightarrow \qquad V = I.Z \qquad \Rightarrow \qquad Z = \frac{V}{I} \qquad (2.17)$$

se concluye que el factor de potencia es tambien el coseno de la fase de la impedancia: cos (ϕ_V - ϕ_I) = cos ϕ_Z, y sustituyendo la ley de Ohm (2.17) en (2.16) se tienen otras expresines para la potencia consumida en una impedancia:

$$P = |I||V| \cos\phi_Z = \frac{|V|^2}{|Z|} \cos\phi_Z = |I|^2 |Z| \cos\phi_Z = |I|^2 \operatorname{Re}(Z) \qquad (2.18)$$

<u>2.5 Resonancia</u>

Dada una impedancia Z, se dice que esta en resonancia cuando la diferencia de potencial entre sus extremos, y la corriente que la atraviesa la impedancia poseen la misma fase. La frecuencia a la cual se cumple la igualdad de las fases entre la ddp y la intensidad enla impedancia, se denomina frecuencia de resonancia. Cuando una impedancia esta en resonancia, tambien se cumplen los siguientes cosas

- La fase de la impedancia es **0.** Como $\phi_Z = \phi_V - \phi_I$ si $\phi_V = \phi_I$ se concluye que $\phi_Z = 0$
- El factor de potencia es **1.** Como $\phi_Z = 0$, se concluye que cos ϕ_Z =1
- La impedancia no posee parte imaginaria., o sea, solo posee parte resistiva o real Re(Z) = $|Z| \cos\phi_Z = |Z|$