TEMA 6.- CÁLCULO DE PRIMITIVAS.

1. CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA 2
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PRIMITIVA 2
DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA. 2
PROPIEDADES. 2
1. La integral de 0 es una constante. 3
2. La integral del producto de un escalar por una función es igual al escalar por la integral de la función. 3
3. Aditividad de la integral respecto al integrando. 3
4. La integral del valor absoluto es mayor o igual que el valor absoluto de la integral. 3
5. La integral de una función mayor que otra no es inferior a la de la menor función. 3
2.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN. 4
CÁLCULO DE PRIMITIVAS: INTEGRALES INMEDIATAS. MÉTODOS. 4
Cálculo de primitivas. 4
Integrales inmediatas. 4
Integrales casi inmediatas. 5
MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACIÓN. 7
Método de integración por partes. 7
Método del cambio de variable 8
MÉTODOS ESPECÍFICOS DE INTEGRACIÓN. 10
Integrales trigonométricas. 10
Integrales racionales. 18
a.- Raíces Reales Simples (RRS): 18
b.- Raíces Reales Múltiples (RRM) 21
c.- Raíces Imaginarias Simples (RIS): 22
Integrales irracionales. 24
INTEGRALES SIN PRIMITIVA. 24
3.- APLICACIONES. 25
APLICACIONES ECONÓMICAS. 25
Obtención de una función total a partir de una función marginal. 25

1. CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA

Uno de los problemas fundamentales que se plantea el Cálculo de una variable geométricamente es el cálculo del área que encierra el gráfico de una función definida en un intervalo [a, b] con el eje de abscisas (y = 0). Dicha área se puede obtener con la integral definida.

En Economía la integral definida aparece ante problemas de determinación de funciones totales a partir de funciones marginales (utilidad marginal ⇒ utilidad total) o, bien, ante procesos que terminan en una "suma" en variables continua como es el caso del cálculo de funciones financieras de capitalización partiendo del concepto de tanto instantáneo de interés.

Son frecuentes las técnicas de la integral en muchos análisis estadísticos de ciertos fenómenos de la realidad económica y empresarial (teoría de las probabilidades, matemática actuarial, etc.)

Para resolver integrales definidas es necesario conocer previamente los distintos métodos de cálculo de primitivas que también es conocida como la "antiderivada" de una función.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PRIMITIVA.

Sea f(x) una función real de variable real definida en un intervalo cerrado $[a, b] \subseteq R$. Se llama **función primitiva** de f(x) a otra función F(x) cuya derivada es f(x) en dicho intervalo.

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ejemplo: La función F(x)=sen(x) es una primitiva de la función cos(x), ya que $\frac{\partial \text{sen}(x)}{\partial x} = \cos(x)$.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA.

Se llama **integral indefinida** de f(x) al conjunto de todas la funciones primitivas de f(x) y se representa por:

$$\int f(x) \cdot dx$$

Si F(x) es una primitiva de f(x), se cumple que

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C, \qquad C \in R$$

Es decir, basta con sumar una constante a una primitiva para tener otra primitiva de la misma función. Para los infinitos valores que puede tomar dicha constante, se tiene una familia de infinitas funciones cuya derivada es f(x). Así pues, cuando se requiera la integral indefinida de una función no habrá que olvidarse de sumar la constante C para tener un conjunto de infinitas primitivas.

A la función f(x) que determina una integral indefinida se le conoce como **función integrando**.

PROPIEDADES.

A continuación se enuncian unas propiedades que cumplen las integrales indefinidas para que se apliquen cuando sea conveniente o necesario en el cálculo de primitivas.

1. La integral de 0 es una constante.

La integral de f(x) = 0 es una constante.

$$\int f(x) \cdot dx = \int 0 \cdot dx = 0 + C = C$$

2. La integral del producto de un escalar por una función es igual al escalar por la integral de la función.

Sea f(x) una función definida en R, y $\alpha \in$ R, entonces la integral de $\alpha \cdot f$ es igual al escalar α por la integral de la función:

$$\int \alpha \cdot f(x) \cdot dx = \alpha \cdot \int f(x) \cdot dx$$

3. Aditividad de la integral respecto al integrando.

La aditividad de la integral respecto al integrando significa que la integral de la suma de dos funciones es la suma de las integrales de las dos funciones sumando.

Sean f: D $\subseteq$ R $\rightarrow$ R y g: $\subseteq$ R $\rightarrow$ R integrables, entonces, la función suma (f+g) es integrable y verifica que:

$$\int [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx$$

NOTA 1: La resta entre dos funciones integrables también es integrable, pues equivale a sumar f(x) con la función -g(x), que también es integrable si lo es g(x), por la propiedad 2. La integral se calcula así:

$$\int [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx - \int g(x) \cdot dx = \int f - \int g\,.$$

NOTA 2: Por esta propiedad y la anterior, se tiene que la combinación lineal de funciones integrables es integrable.

$$\int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] \cdot dx = \alpha \cdot \int f(x) \cdot dx + \beta \cdot \int g(x) \cdot dx\,.$$

4. La integral del valor absoluto es mayor o igual que el valor absoluto de la integral.

Sea f: D $\subseteq$ R $\rightarrow$ R, entonces la función valor absoluto de f(x), $|\,f(x)\,|$ también es integrable y su integral es mayor o igual que la integral de f(x) en valor absoluto.

$$\left|\int f(x) \cdot dx\right| \leq \int |\,f(x)\,| \cdot dx$$

5. La integral de una función mayor que otra no es inferior a la de la menor función.

Dadas dos funciones g(x) y f(x), tales que g(x)$\geq$f(x) $\forall$x$\in$R, entonces la integral de g es mayor o igual que la integral de f .

$$f(x) \leq g(x)\ \forall x \in R \Rightarrow \int f(x) \cdot dx \leq \int g(x) \cdot dx$$

2.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS: INTEGRALES INMEDIATAS. MÉTODOS.

Cálculo de primitivas.

Resolver una integral indefinida no es más que calcular su primitiva. Para ello es necesario analizar dicha integral, en concreto su función integrando, y a partir de dicho análisis se procede a aplicar el método más adecuado de resolución. Se trata de analizar el tipo de integral, atendiendo a su método de resolución. Se empieza por ver si pertenece a un tipo de integral de más fácil resolución y conforme se vaya desechando su pertenencia a los grupos de más fácil resolución se pasa a analizar su pertenencia a tipos de más compleja resolución. Un posible orden a seguir para ese análisis sería el siguiente, aunque el punto 5º podría analizarse el primero, y el 3º y 4º alternar su posición:

1. Comprobación de si es una integral inmediata.
2. Comprobación de si es casi inmediata.
3. Comprobar si es una integral con método específico.
4. Comprobar si se le puede aplicar un método general de resolución.
5. Comprobar si se trata de una integral sin primitiva.

El detalle de lo que habría que efectuar en cada paso se explica a continuación.

Integrales inmediatas.

Para calcular una integral es necesario conocer las derivadas de distintas funciones, pues hay que determinar la función cuya derivada es la función integrando de la que se quiere calcular la integral. A la integral indefinida, por ese ejercicio de cálculo, también se le conoce como **anti-derivada**. Hay que hacer el ejercicio inverso al de obtener la derivada de una función. A partir de este hecho, se puede construir una tabla con las integrales que se conocen de manera inmediata a partir de las derivadas de funciones conocidas. A estas integrales cuya primitiva es fácil de conocer se le llaman **integrales inmediatas**.

Se facilita a continuación una tabla de integrales inmediatas para su memorización. Para que sea manejable, no es una tabla muy extensa, además sería imposible construir una con las infinitas funciones. Por estos motivos la tabla recoge las integrales inmediatas básicas de funciones comúnmente empleadas.

Integrales inmediatas	
Integrales concretas	Integrales genéricas
$\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \qquad m \neq -1$	$\int f(x)^m \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{f(x)^{m+1}}{m+1} + C \qquad m \neq -1$
$\int x^{-1} \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln \mid x \mid + C$	$\int f(x)^{-1} \cdot f'(x) \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln \mid f(x) \mid + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot dx = \sqrt{f(x)} + C$

Integrales inmediatas	
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x \cdot \ln a \cdot dx = a^x + C \quad a > 0$	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot dx = a^{f(x)} + C \quad a > 0$
$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot dx = \log_a x + C \quad a > 0$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot dx = \log_a f(x) + C \quad a > 0$
$\int \cos x \cdot dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) \cdot dx = \operatorname{sen} f(x) + C$
$\int \operatorname{sen} x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) \cdot dx = -\cos f(x) + C$
$\int 1 + \operatorname{tg}^2 x \cdot dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int f'(x) \cdot [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot dx = \operatorname{tg} f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = -\arccos x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot dx = -\arccos f(x) + C$
$\int \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$

La tabla de integrales no permite resolver todas las integrales, lo que obliga a explicar métodos alternativos de búsqueda/cálculo de primitivas. Alguno de esos métodos se explica en estas páginas. Todos ellos tratarán de reducir el resultado de la integral original a la resolución de una o varias integrales inmediatas.

Integrales casi inmediatas.

Se puede dar el caso de que una función integrando no admita primitiva de manera inmediata, pero con sencillas operaciones aritméticas pueda acabar resolviéndose la integral mediante su transformación en una integral inmediata o una combinación de integrales inmediatas. Esto se consigue mediante el uso combinado de las propiedades de las integrales y la tabla de inmediatas para poder acabar resolviendo un mayor número de integrales que no aparezcan en dicha tabla como serían las de funciones resultado de sumas, productos de escalares por una función, o combinaciones lineales de las funciones, por ejemplo.

Suma de integrales inmediatas:

$$\int [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx .$$

Ejemplo: La función integrando de la siguiente integral es una función que no está en la tabla, pero es el resultado de la suma de dos que sí lo están. Se utiliza el hecho que la integral de la suma de dos funciones es la suma de las integrales de las funciones sumando y se tiene:

$$\int [e^x + \cos x] \cdot dx = \int e^x \cdot dx + \int \cos x \cdot dx = e^x + C_1 + \operatorname{sen} x + C_2 = e^x + \operatorname{sen} x + C$$

Producto de un escalar por una integral:

$$\int [\alpha \cdot f(x)] \cdot dx = \alpha \cdot \int f(x) \cdot dx$$

Ejemplo: En la siguiente integral la función integrando es exponencial por lo que su primitiva será del mismo tipo, exponencial con la misma base y exponente, pero como la derivada de una función exponencial es igual a esa misma función multiplicada por el logaritmo neperiano de la base y por la derivada del exponente, se detecta que la primitiva no puede ser e^{3x} porque falta en el integrando la derivada del exponente que es 3.

$$\int e^{3x} \cdot dx = \int e^{3x} \cdot dx$$

Para resolver esta integral no inmediata basta con multiplicar y dividir por el mismo número la integral (multiplicar por 1 hace que no se altere el resultado) para aprovecharse de que la integral del producto de un escalar por una función es igual a dicho escalar por la integral de la función. Se multiplica por 3 y se divide por 3, ya que es el número 3 el que falta multiplicando en el integrando para tener la derivada del exponente:

$$\int e^{3x} \cdot dx = \frac{3}{3} \cdot \int e^{3x} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot e^{3x} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + C$$

No era inmediata, pero al multiplicar y dividir por 3 se ha conseguido resolver usando la tabla de inmediatas, pues la integral original ha resultado ser un tercio de una inmediata del tipo $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot dx = e^{f(x)} + C$.

No es correcto multiplicar y dividir por una expresión o función de x para obtener en el integrando la derivada del exponente, por ejemplo

$$\int e^{3x^2} \cdot dx \Rightarrow \text{INCORRECTO} \Rightarrow \frac{6x}{6x} \cdot \int e^{3x^2} \cdot dx = \frac{1}{6x} \cdot \int 6x \cdot e^{3x^2} \cdot dx .$$

Combinación lineal de inmediatas:

$$\int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] \cdot dx = \alpha \cdot \int f(x) \cdot dx + \beta \cdot \int g(x) \cdot dx$$

No hay más que atender a los dos casos anteriores a la vez.

Ejemplo:

$$\int [\cos(5x) + x \cdot e^{x^2}] \cdot dx$$

Función suma de una trigonométrica más una exponencial, pero al descomponerla en suma de dos integrales, éstas tampoco son inmediatas. Se trata de si es posible multiplicarlas por un número que las transforme en inmediatas, siendo ese número la derivada del ángulo, en el primer caso, y el que falta para que al multiplicar por x sea la derivada del exponente, en el segundo caso.

$$\int [\cos(5x) + x \cdot e^{x^2}] \cdot dx = \int \cos(5x) \cdot dx + \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{5} \int 5 \cdot \cos(5x) \cdot dx + \frac{1}{2} \int 2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$$

MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACIÓN.

Método de integración por partes.

Ya se ha visto cómo resolver integrales casi inmediatas, es decir, cómo resolver la integral cuando la función integrando consiste en una combinación lineal de funciones cuya integral es inmediata. Como casos particulares está la suma, la resta, el producto por un número, etc. Para otras integrales no inmediatas cuya función integrando es el producto de dos funciones, se suele utilizar el **método de integración por partes**. Cuando una de las funciones factor de la función integrando producto es difícil de integrar, pero fácil de derivar, o al revés, o ambas cosas a la vez, se hace una sustitución o cambio de variable de forma que la parte del integrando "difícil" se llame u(x), y el resto, incluyendo el producto por dx, dv(x).

La justificación matemática del método proviene de la diferenciación del producto de dos funciones y se va a presentar a continuación.

Sean dos funciones u(x) y v(x) reales de variable real, tales que u: $D \subseteq R \rightarrow R$; v: $D \subseteq R \rightarrow R$, diferenciables en su dominio. Entonces el producto de las dos funciones es otra función diferenciable y su diferencial es:

$$d[u(x) \cdot v(x)] = u(x) \cdot dv(x) + v(x) \cdot du(x)$$

$$d[u \cdot v] = u \cdot dv + v \cdot du$$

Si se integran ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$\int d[u \cdot v] = \int u \cdot dv + v \cdot du = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

$$\cancel{\int} \cancel{d}[u \cdot v] = u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Ejemplo: Resuelva la siguiente integral.

$$\int \operatorname{arctg} x \cdot dx$$

No es inmediata ni casi inmediata, aunque aparece una función trigonométrica se va a tratar de resolver mediante el método de integración por partes, considerando que

$$u = \operatorname{arctg} x \rightarrow du = \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = \int dv = \int dx = x$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Sustituyendo en la integral original se tiene

$$\int \operatorname{arctg} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx$$

La integral $\int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx$ no es inmediata, pero basta con multiplicar (y dividir) por 2 el integrando para tener una integral inmediata del tipo $\int f(x)^{-1} \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln | f(x) | + C$.

$$\int \operatorname{arctg} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln | 1+x^2 | + C$$

Método del cambio de variable.

Ya se ha explicado cómo resolver integrales cuando el integrando es una combinación lineal de funciones (casi inmediatas) o el producto de funciones (integración por partes). Otro caso a tratar es el de una función integrando que resulte indirectamente de la composición de funciones diferenciables (y por tanto integrables), es decir, el caso en el que el integrando es la diferencial de una función compuesta de otras dos.

Esta operación de composición es la que está detrás de un cambio de variable. El objetivo es resolver una integral no inmediata mediante un cambio de variable que transforme la integral original en otra de más fácil resolución, bien porque sea inmediata, casi inmediata o porque permita aplicar métodos específicos de integración o el método de integración por partes. El cambio de variable más conveniente es el que simplifique la integral, pero es la intuición y la experiencia las que acortarán el tiempo de búsqueda del cambio de variable más adecuado, pues en general no hay reglas fijas para proponer cambios de variable, salvo en determinados tipos de integrales. Alguno de los cambios recomendados se explica cuando se aborden los métodos específicos de integración descritos después.

Sea $f : D_f \subseteq R \to R$ continua en D_f y sea a $g : D_g \subseteq R \to R$ una función de clase 1 en su dominio. Si se cumple que $g[D_g] \subseteq D_f$, está garantizada la existencia de función compuesta $f[g(t)]$ en D_g que será diferenciable (regla de la cadena). Si f es continua en D_f, por tratarse de una función real de variable real, también es diferenciable en su dominio.

$$\underbrace{D_g \xrightarrow{g} D_f \xrightarrow{f} R}_{f \circ g}$$

$$\int f(x) \cdot dx = \int f[(x(t)] \cdot dx(t) = \int f[(x(t)] \cdot x'(t) \cdot dx$$

La función x(t)=g(t) es la función de cambio de variable que se vaya a proponer de manera que se verifiquen los supuestos que permitan resolver la integral y que debe admitir inversa, para una vez obtenida la primitiva F[x(t)], poder deshacer el cambio de variable.

$$t \in D_g \xrightarrow{g} x(t) \in D_f \xrightarrow{f} f[x(t)] \in R$$

NOTA: Si existe la función compuesta por $g[D_g] \subseteq D_f$, y las funciones f y g cumplen las propiedades antes mencionadas, se tiene garantizado que la función compuesta es diferenciable e integrable.

Muchas veces se aplica un cambio de variable por no haberse fijado que la integral a resolver es inmediata o casi inmediata, pero se debe a que no siempre es fácil darse cuenta y un cambio de variable permite transformar la integral original en una integral inmediata de las de la primera columna de la tabla, cuando la integral original era inmediata, pero estaba en la segunda columna de la misma fila.

Ejemplos: Resuelva las siguientes integrales.

a) $\int \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx$.

b) $\int \mathrm{tg}\, x \cdot dx = \int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x} \cdot dx$.

Solución:

a) Es inmediata del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln |f(x)| + C$, pero con un cambio de variable se aprecia más esa inmediatez.

$$t = e^x$$
$$x = \ln t$$
$$dx = \frac{1}{t} \cdot dt$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx = \int \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \int \frac{dt}{1+t} = \ln |1+t| + C$$

Una vez obtenida la primitiva F[x(t)]=F[g(t)] hay que deshacer el cambio y poner t en función de x, $t(x) = g^{-1}(x)$.

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx = \ln |1+e^x| + C$$

b) No es inmediata, pero es casi inmediata, puesto que la función numerador es casi la derivada de la función denominador, pues le falta estar multiplicada por (-1). Por tanto, se multiplica y divide por el mismo número, (-1), y se tendrá una integral inmediata del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln |f(x)| + C$.

$$\int \mathrm{tg}\, x \cdot dx = \int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x} \cdot dx = -\int \frac{-\mathrm{sen} x}{\cos x} \cdot dx = -\ln |\cos x| + C$$

Con el siguiente cambio de variable se resuelve de la misma manera.

$$t = \cos x$$
$$x = \arccos t$$
$$dt = -\mathrm{sen} x \cdot dx \Rightarrow -dt = \mathrm{sen} x \cdot dx$$

Sustituyendo en la integral original se tiene la primitiva F[x(t)]:

$$\int \operatorname{tg} x \cdot dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot dx = -\int \frac{-\,dt}{t} = -\ln|t| + C.$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\int \operatorname{tg} x \cdot dx = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Otras veces, el cambio de variable simplifica los pasos que se tendrían que dar con el uso del método de integración por partes.

En otras ocasiones, hay cambios de variable recomendados para determinados tipos de integrales, como se verá más tarde en el caso de integrales trigonométricas, irracionales, etc., que transforman a la integral original en una integral racional y/o inmediata.

Así pues, en muchos casos se combinan distintos métodos de integración, tanto generales como específicos, por lo que es necesario tener un conocimiento de todos ellos, así, como ya se ha visto, hay integrales cuya solución puede obtenerse por distintos métodos.

MÉTODOS ESPECÍFICOS DE INTEGRACIÓN.

Integrales trigonométricas.

Se llaman así a todas las integrales en las que aparece alguna función trigonométrica, o bien, cuando no aparece ninguna función, pero admite algún cambio de variable de tipo trigonométrico. Los tipos principales son:

1. El integrando es el producto de un seno (coseno) por un coseno (seno).
2. El integrando contiene la función seno o coseno elevada a una potencia impar.
3. El integrando contiene la función seno o coseno elevada al cuadrado.
4. El integrando contiene la función seno y coseno elevadas a potencias pares.
5. Cambio de variable general para integrales trigonométricas.

Se procede a detallar cada uno de los cinco tipos anteriores.

1. El integrando es el producto de un seno (coseno) por un coseno (seno).

Se trata de integrales donde el integrando es el producto de una función seno o coseno de un ángulo a, por otra función seno o coseno de otro ángulo b.

$$\int \operatorname{sen} a \cdot \cos b \cdot dx\,; \quad \int \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot dx\,; \quad \int \cos a \cdot \cos b \cdot dx\,.$$

Tanto a como b son ángulos función de la variable x, es decir, serían a(x) y b(x) funciones reales de la variable real x. Se resuelven estas integrales mediante las relaciones trigonométricas del seno y el coseno de la suma o diferencia de dos ángulos, es decir, mediante las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Se trata de hacer más fácil la función integrando, sustituyendo un producto por una suma de funciones trigonométricas.

Ejemplos:

a) $\int \operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot dx$

Se puede resolver mediante estas relaciones, en concreto, mediante la primera. Dado que los dos ángulos son iguales, a = b, se tiene

$$\operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a \cdot \cos a + \cos a \cdot \operatorname{sen} a \Rightarrow \operatorname{sen}(2a) = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2a)}{2} = \operatorname{sen} a \cdot \cos a .$$

Se sustituye en el integrando y se tiene

$$\int \operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot dx = \int \frac{\operatorname{sen}(6x)}{2} \cdot dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(6x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)\int (-6) \cdot \operatorname{sen}(6x) \cdot dx =$$
$$= -\frac{1}{12}\cos(6x) + C$$

Para expresar la solución en función del ángulo original, 3x, se vuelven a utilizar las relaciones anteriores, partiendo de que se tiene el coseno del ángulo doble, 6x y de que el coseno de 0 es 1:

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a \Rightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\cos(a-a) = \cos a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a \Rightarrow 1 = \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\cos(6x) = \cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = \cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = 1 - \operatorname{sen}^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 3x$$

La solución quedará::

$$\int \operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot dx = -\frac{1}{12}\cos(6x) + C = -\frac{1}{12}[1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(3x)] + C =$$
$$= -\frac{1}{12} + \frac{2}{12} \cdot \operatorname{sen}^2(3x) + C = \frac{1}{6} \cdot \operatorname{sen}^2(3x) + C - \frac{1}{12} = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{6} + C'$$

A este mismo resultado se llega si se hubiera analizado la integral previamente y detectado que era casi inmediata, pues en el integrando se tiene una función (trigonométrica) elevada a una potencia multiplicada por casi su derivada, $\int f(x)^m \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{f(x)^{m+1}}{m+1} + C \quad m \neq -1$.

$$\int \operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot dx = \frac{1}{3}\int 3 \cdot [\operatorname{sen}(3x)]^1 \cdot [\cos(3x)]dx = \frac{1}{6} \cdot \operatorname{sen}^2(3x) + C .$$

b) $\int \text{sen}\,(3x) \cdot \cos(7x) \cdot dx$.

Mediante las expresiones del seno de la suma y del seno de la diferencia se puede llegar a resolver esta integral:

$$\begin{array}{r} \text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \cos a \cdot \text{sen}\,b \\ + \ \text{sen}(a-b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen}\,b \\ \hline \text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos b \end{array}$$

De donde se obtiene:

$$\text{sen}\,a \cdot \cos b = \frac{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)}{2}$$

Aplicado a la integral en particular que se quiere resolver, se tiene:

$$\int \text{sen}(3x) \cdot \cos(7x) \cdot dx = \int \frac{\text{sen}(3x+7x) + \text{sen}(3x-7x)}{2} \cdot dx = \int \frac{1}{2} \cdot [\text{sen}(10x) + \text{sen}(-4x)] \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{sen}(10x) \cdot dx + \frac{1}{2}\int \text{sen}(-4x) \cdot dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\right)\int 10 \cdot \text{sen}(10x) \cdot dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\int 4 \cdot \text{sen}(-4x) \cdot dx = -\frac{1}{20}\cos(10x) + \frac{1}{8}\cos(-4x) + C$$

c) $\int \cos(3x/4) \cdot \cos(9x/4) \cdot dx$.

Mediante las expresiones del coseno de la suma y del coseno de la diferencia se puede llegar a resolver esta integral:

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \\ + \ \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \end{array}$$

De donde se obtiene:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

Aplicado a la integral en particular que se quiere resolver, se tiene:

$$a = \frac{3x}{4}; b = \frac{9x}{4} \Rightarrow a + b = \frac{3x}{4} + \frac{9x}{4} = \frac{12x}{4} = 3x; a - b = \frac{3x}{4} - \frac{9x}{4} = -\frac{6x}{4} = -a + b = -\frac{3x}{2}$$

$$\int \cos(3x / 4) \cdot \cos(9x / 4) \cdot dx = \int \frac{1}{2} \cdot [\cos(3x) + \cos(-3x / 2)] \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \cos(3x) \cdot dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \int \cos(-3x / 2) \cdot dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\int 3 \cdot \cos(3x) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)\int -\frac{3}{2} \cdot \cos(-3x / 2) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}(-3x / 2) + C = \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x / 2) + C$$

d) $\int \operatorname{sen}(8x/5) \cdot \operatorname{sen}(7x/5) \cdot dx$.

Mediante las expresiones del coseno de la suma y del coseno de la diferencia se puede llegar a resolver esta integral:

$$\begin{array}{r} \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \\ -\ \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \\ \hline \cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \end{array}$$

De donde se obtiene:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = -\frac{\cos(a + b) - \cos(a - b)}{2}$$

Aplicado a la integral en particular que se quiere resolver, se tiene:

$$a = \frac{8x}{5}; b = \frac{7x}{5} \Rightarrow a + b = \frac{8x + 7x}{5} = \frac{15x}{5} = 3x; a - b = \frac{8x}{5} - \frac{7x}{5} = \frac{x}{5}$$

$$\int \operatorname{sen}(8x / 5) \cdot \operatorname{sen}(7x / 5) \cdot dx = \int -\frac{1}{2} \cdot [\cos(3x) - \cos(x / 5)] \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \cos(3x) \cdot dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \int \cos(x / 5) \cdot dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\int 3 \cdot \cos(3x) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot 5\int \frac{1}{5} \cdot \cos(x / 5) \cdot dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}(3x)}{6} + \frac{5}{2} \cdot \operatorname{sen}(x / 5) + C$$

2. <u>El integrando contiene la función seno o coseno elevada a potencia impar</u>.

Se trata de integrales de este tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n(a) \cdot dx; \qquad \int \cos^n(a) \cdot dx; \qquad n \text{ impar.}$$

El método recomendado para resolverlas consiste en el siguiente cambio de variable:

$$\text{Para } \operatorname{sen}^n(a) \Rightarrow t = \cos(a).$$

$$\text{Para } \cos^n(a) \Rightarrow t = \operatorname{sen}(a)$$

Se trata de hacer más fácil la función integrando, sustituyendo la potencia (producto n veces) por una integral en la que el integrando es un polinomio.

Ejemplos:

a) $\int \cos^3 x \cdot dx$

Como el exponente es impar, se sugiere el cambio $t = \operatorname{sen} x$. Así se tiene:

$$t = \operatorname{sen} x \Rightarrow x = \operatorname{arcsen} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Con este cambio, como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - t^2}$

Se aplica el cambio de variable y se resuelve la integral respecto a la nueva variable, sin olvidarse de deshacer el cambio una vez obtenida la primitiva.

$$\int \cos^3 x \cdot dx = \int \left(\sqrt{1 - t^2}\right)^3 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int \left(\sqrt{1 - t^2}\right)^2 \cdot dt = \int (1 - t^2) \cdot dt =$$

$$= \int dt - \int t^2 \cdot dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

Se podía haber resuelto esta integral en particular de una manera más rápida sin usar ningún cambio de variable, utilizando las propiedades de las integrales para descomponerla en suma de integrales casi inmediatas:

$$\int \cos^3 x \cdot dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \cos x \cdot [1 - \operatorname{sen}^2 x] \cdot dx = \int \cos x \cdot dx - \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot dx =$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

b) $\int \operatorname{sen}^3(5x) \cdot dx$ Como el exponente es impar, se sugiere el cambio $t = \cos x$. Así se tiene:

$$t = \cos(5x) \Rightarrow 5x = \arccos t \Rightarrow x = \frac{\arccos t}{5} \Rightarrow dx = \frac{-\,dt}{5\sqrt{1 - t^2}}.$$

Se aplica el cambio de variable y se resuelve la integral respecto a la nueva variable, sin olvidarse de deshacer el cambio una vez obtenida la primitiva.

$$\int \text{sen}^3(5x) \cdot dx = \int \left(\sqrt{1-\cos^2(5x)}\right)^3 \cdot dx = \int (1-t^2)^{3/2} \cdot \frac{-dt}{5 \cdot (1-t^2)^{1/2}} = -\frac{1}{5}\int (1-t^2) \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{5}\int dt + \frac{1}{5}\int t^2 \cdot dt = -\frac{1}{5} \cdot t + \frac{1}{5} \cdot \frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos(5x)}{5} + \frac{\cos^3(5x)}{15} + C$$

3. <u>El integrando contiene la función seno o coseno elevada al cuadrado</u>.

Se trata de integrales de este tipo y son caso particular del primer tipo, por lo que s trata de hacer más fácil la función integrando, sustituyendo un producto por una suma de funciones trigonométricas.

$$\int \text{sen}^2(a) \cdot dx; \qquad \int \cos^2(a) \cdot dx .$$

Se emplean las relaciones trigonométricas comentadas anteriormente para a = b.

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b \xrightarrow{a=b} \cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b \xrightarrow{a=b} \cos(0) = 1 = \cos^2 a + \text{sen}^2 a$$

Sumando o restando las dos ecuaciones anteriores se tiene:

$$\begin{array}{l} \cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \\ \underline{+ \qquad 1 = \cos^2 a + \text{sen}^2 a} \\ \cos(2a) + 1 = 2\cos^2 a \Rightarrow \cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \\ \underline{- \qquad 1 = \cos^2 a + \text{sen}^2 a} \\ \cos(2a) - 1 = -2\text{sen}^2 a \Rightarrow \text{sen}^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2} \end{array}$$

Ejemplos:

a) $\int \text{sen}^2(15x) \cdot dx$

$$\int \text{sen}^2(15x) \cdot dx = \int \frac{1-\cos(30x)}{2} \cdot dx = \frac{1}{2}\int [1-\cos(30x)] \cdot dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(30x) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{30}\int 30 \cdot \cos(30x) \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{60}\text{sen}(30x) + C$$

b $\int \cos^2(19x) \cdot dx$

$$\int \cos^2(19x) \cdot dx = \int \frac{1 + \cos(38x)}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int [1 + \cos(38x)] \cdot dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(38x) \cdot dx =$$
$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{1}{38} \int 38 \cdot \cos(38x) \cdot dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{76} \operatorname{sen}(38x) + C$$

4. <u>El integrando contiene la función seno y coseno elevadas a potencias pares</u>.

El cambio recomendado en integrales que contienen simultáneamente la función seno, $\operatorname{sen} x$, y coseno, $\cos x$, elevados a potencias pares es el siguiente $\operatorname{tg} x = t$.

$$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1 + t^2} \cdot dt$$

El seno y el coseno al cuadrado se pueden expresar en función de la tangente a partir de dividir por seno al cuadrado o por coseno al cuadrado la siguiente relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx$$

Atendiendo a las relaciones anteriores se puede expresar la integral original de la siguiente manera:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot [\operatorname{tg}^2 x + 1] \cdot dx$$

Con el cambio de variable propuesto, sin olvidarse de deshacer el cambio una vez obtenida la primitiva, se obtiene la solución:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot [\operatorname{tg}^2 x + 1] \cdot dx = \int t^2 \cdot [t^2 + 1] \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int t^2 \cdot dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

5. <u>Cambio de variable general para integrales trigonométricas</u>.

El cambio general $\operatorname{tg}(x/2) = t$ resuelve toda integral trigonométrica, pero tiene el inconveniente de que conduce a procesos laboriosos si no es adecuado.

$$tg(x/2) = t \Rightarrow arctg\,t = x/2 \Rightarrow x = 2\cdot arctg\,t \Rightarrow dx = \frac{2\cdot dt}{1+t^2}.$$

Las funciones seno y coseno de un ángulo pueden expresarse en función de la tangente de la mitad de ese mismo ángulo de la siguiente manera:

$$sen\,x = \frac{sen\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\dfrac{2\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cdot tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$cos\,x = \frac{cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\dfrac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Tras el cambio de variable, las funciones seno y coseno quedan así:

$$sen[x(t)] = \frac{2\cdot t}{1+t^2}; \qquad cos[x(t)] = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ejemplo: Integral del autogiro de Juan de la Cierva.

$$\int \frac{dx}{1+sen\,x+cos\,x}$$

No es posible resolverla con el cambio recomendado para funciones coseno/seno elevadas a exponentes impares, por lo que se sugiere el cambio general. Así se tiene:

$$tg(x/2) = t \Rightarrow arctg\,t = x/2 \Rightarrow x = 2\cdot arctg\,t \Rightarrow dx = \frac{2\cdot dt}{1+t^2}$$

$$sen[x(t)] = \frac{2\cdot t}{1+t^2}; \qquad cos[x(t)] = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+sen\,x+cos\,x} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt = \int \frac{2}{2+2t}dt = \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \ln|1+t|+C = \ln|1+tg(x/2)|+C$$

Integrales racionales.

Son aquellas integrales en las que el integrando es el cociente o quebrado entre dos polinomios de x:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx$$

El método de resolución consiste en los siguientes pasos:

1) Si el polinomio del numerador p(x), es de mayor o igual grado que el del polinomio del denominador, se debe efectuar la división, recordando que:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}} \Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Se sustituye en la integral:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx = \int Q(x) \cdot dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} \cdot dx$$

2) Si el polinomio del numerador es de menor grado que el del polinomio del denominador, lo que sucede con el cociente obtenido en el paso anterior, $r(x)/q(x)$, se obtienen las raíces del polinomio denominador, mediante la ecuación q(x)=0, aplicando Ruffini o resolviendo la ecuación. A partir de esas raíces se expresa el polinomio denominador en forma de producto de factores, es decir, se factoriza. Un polinomio q(x) de grado m se expresaría así:

$$q(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \cdots \cdot (x - r_m) .$$

3) Según el tipo de raíces del polinomio q(x) obtenidas se procede como sigue:

a.- Raíces Reales Simples (RRS):

Todas las raíces del polinomio denominador, q(x), son números reales distintos entre sí. Si el grado del polinomio denominador es m, serán m las raíces reales distintas, es decir, sin repetir. Por tanto el cociente de polinomios con numerador de inferior grado que el denominador se expresa así:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_m)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \frac{A_3}{(x - r_3)} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r_m)} .$$

Por tanto, la integral de un cociente, si no es inmediata, se puede expresar como suma de integrales inmediatas, todas ellas con primitiva del tipo $\ln | x - r_j |$.

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx &= \int \left[\frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \frac{A_3}{(x - r_3)} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r_m)} \right] \cdot dx = \\ &= \int \frac{A_1}{(x - r_1)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x - r_2)} \cdot dx + \cdots + \int \frac{A_m}{(x - r_m)} \cdot dx = \\ &= A_1 \cdot \ln | x - r_1 | + A_m \cdot \ln | x - r_2 | + \cdots + A_m \cdot \ln | x - r_m | + C \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{2x^2 + x - 3} \cdot dx$$

Como el polinomio numerador es de grado 3 (máxima potencia de x, exponente entero positivo) es superior al del denominador, por lo que se procede a dividir los dos polinomios:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad -x \quad +1 & 2x^2 + x - 3 \\ \hline
-x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x & \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ \hline
0 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + 1 & \\
+\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3}{4} & \\ \hline
\frac{3x}{4} + \frac{1}{4} &
\end{array}$$

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{2x^2 + x - 3} \cdot dx = \int \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{3x}{4} + \frac{1}{4}}{2x^2 + x - 3} \right) \cdot dx = \int \frac{x}{2} \cdot dx - \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{3x + 1}{2x^2 + x - 3} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \int \frac{3x + 1}{2x^2 + x - 3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} I = (1)$$

Se resolverá a continuación la integral $I = \int \frac{3x + 1}{2x^2 + x - 3} dx$, que también es racional.

Se obtienen las raíces del polinomio denominador.

$$q(x) = 2x^2 + x - 3 = 2 \cdot \left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right)$$

Los polinomios $q(x) = 2x^2 + x - 3$ y $\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right)$ tienen las mismas raíces.

$$q(x) = 2x^2 + x - 3 = 2 \cdot \left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Este polinomio denominador se puede expresar ahora así:

$$q(x) = 2x^2 + x - 3 = 2 \cdot (x - 1) \cdot \left(x + \frac{3}{2} \right)$$

La integral I ahora se puede resolver así:

$$I = \int \frac{3x+1}{2x^2+x-3}dx = \int \frac{3x+1}{2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx$$

El cociente integrando se puede expresar como suma de dos cocientes de la siguiente manera:

$$\frac{3x+1}{2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{A_1}{2\cdot(x-1)} + \frac{A_2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{A_1\left(x+\frac{3}{2}\right)+A_2\cdot 2\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$

Dos cocientes con el mismo denominador son iguales si coincide también el numerador, por lo que al igualar los dos polinomios numeradores se tendrá planteado un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas a resolver: A_1, A_2.

$$3x+1 = A_1\left(x+\frac{3}{2}\right)+A_2\cdot 2\cdot(x-1) = (A_1+2A_2)x+\left(\frac{3}{2}A_1-2A_2\right)$$

Dos polinomios son iguales si los coeficientes que multiplican a las distintas potencias en ambos polinomios coinciden.

$$\begin{array}{rl} & 3 = (A_1+2A_2) \\ + & 1 = \left(\frac{3}{2}A_1-2A_2\right) \\ \hline & 4 = \frac{5}{2}A_1+0 \quad \Rightarrow A_1 = \frac{8}{5} \end{array}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3 = \frac{8}{5}+2A_2 \Rightarrow 2A_2 = 3-\frac{8}{5} = \frac{15-8}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow A_2 = \frac{\frac{7}{5}}{2} = \frac{7}{10}$$

Sustituyendo en I, se tiene la solución:

$$I = \int \frac{3x+1}{2x^2+x-3}dx = \int \frac{3x+1}{2(x-1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx = \int \frac{A_1}{2(x-1)}dx + \int \frac{A_2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{8}{5}}{2(x-1)}dx + \int \frac{\frac{7}{10}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx = \frac{8}{10}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{7}{10}\int \frac{2dx}{2x+3} = \frac{8}{10}\ln|x-1| + \frac{7}{10}\ln|2x+3| + C$$

Sustituyendo I en la expresión inicial, se tiene la solución de la integral original:

$$(1) = \int \frac{x^3 - x + 1}{2x^2 + x - 3} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}I = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{8}{10}\ln|x-1| + \frac{7}{10}\ln|2x+3| + C\right] =$$

$$= \frac{x^2 - x}{4} + \frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{7}{40}\ln|2x+3| + \left[\frac{1}{4}C\right] = \frac{x^2 - x}{4} + \frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{7}{40}\ln|2x+3| + C'$$

b.- Raíces Reales Múltiples (RRM)

Todas las raíces del polinomio denominador, q(x), son números reales, pero alguno se aparece más de un vez, es decir, se repite. El grado de multiplicidad de alguna raíz, m_i, que es como se conoce al número de veces que aparece como repetida una raíz, es mayor que 1. La suma de todos los grados de multiplicidad de be coincidir con el grado del polinomio. Suponiendo que existen k raíces distintas, siendo k menor que m, grado del polinomio, el cociente de polinomios con numerador de inferior grado que el denominador se expresa así:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x - r_1)^{m_1} \cdot (x - r_2)^{m_2} \cdot \cdots \cdot (x - r_k)^{m_k}} =$$

$$= \frac{A_{11}}{(x - r_1)} + \frac{A_{12}}{(x - r_1)^2} + \frac{A_{13}}{(x - r_1)^3} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x - r_1)^{m_1}} + \frac{A_{21}}{(x - r_2)} + \frac{A_{22}}{(x - r_2)^2} + \frac{A_{23}}{(x - r_2)^3} + \cdots +$$

$$+ \frac{A_{2m_2}}{(x - r_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{(x - r_k)} + \frac{A_{k2}}{(x - r_k)^2} + \frac{A_{k3}}{(x - r_k)^3} + \cdots + \frac{A_{km_k}}{(x - r_k)^{m_k}}$$

Para resolver la integral de un cociente, si no es inmediata, se puede expresar como suma de integrales inmediatas o casi inmediatas, todas ellas con primitiva del tipo $\ln|x - r_j|$ ó $[x - r_j]^n$.

Ejemplo: $\int \frac{x+2}{x \cdot (x-1)^2} \cdot dx$

Como el polinomio numerador es de grado 1 (máxima potencia de x, exponente entero positivo) es inferior al del denominador, por lo que se obtienen las raíces del polinomio denominador que son fáciles de obtener, pues son r_1=0 con grado de multiplicidad 1, y r_2=1 con grado de multiplicidad 2.

$$x \cdot (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow r_2 = 0 \quad m_1 = 1 \\ (x-1)^2 = 0 \Rightarrow r_2 = 1 \quad m_2 = 2 \end{array} \right.$$

A partir de las raíces y sus grados de multiplicidad, se quiere expresar el cociente como suma de otros cocientes, por lo que se plantea la siguiente ecuación que permita obtener los coeficientes que lo hagan posible:

$$\frac{x+2}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2 x + A_3 x(x-1)}{x(x-1)^2}$$

Igualando los numeradores se plantearán las tres ecuaciones que permitan obtener las tres incógnitas, A_1, A_2, A_3.

$$x+2=A_1(x-1)^2+A_2x+A_3x(x-1)=A_1(x^2-2x+1)+A_2x+A_3(x^2-x)$$
$$x+2=A_1x^2-2A_1x+A_1+A_2x+A_3x^2-A_3x=(A_1+A_3)x^2+(A_2-2A_1-A_3)x+A_1$$

$$x+2=(A_1+A_3)x^2+(A_2-2A_1-A_3)x+A_1 \Rightarrow \begin{cases} 0=A_1+A_3 \\ 1=A_2-2A_1-A_3 \\ 2=A_1 \end{cases}$$

$$2=A_1 \Rightarrow 0=A_1+A_3 \Rightarrow 0=2+A_3 \Rightarrow A_3=-2$$
$$A_1=2;\ A_3=-2 \Rightarrow 1=A_2-2A_1-A_3 \Rightarrow 1=A_2-2(2)-(-2) \Rightarrow A_2=1+4-2=3$$

$$\frac{x+2}{x\cdot(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)}=\frac{A_1(x-1)^2+A_2x+A_3x(x-1)}{x(x-1)^2}$$

Se sustituye el integrando original por la suma de los tres cocientes planteados sustituyendo los valores de los coeficientes indeterminados.

$$\int \frac{x+2}{x\cdot(x-1)^2}\cdot dx=\int\left[\frac{2}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{-2}{(x-1)}\right]\cdot dx=\int\frac{2}{x}\cdot dx+\int\frac{3}{(x-1)^2}\cdot dx+\int\frac{-2}{(x-1)}\cdot dx=$$
$$=2\ln|x|+3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-2\ln|x-1|+C=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{3}{x-1}+C$$

c.- Raíces Imaginarias Simples (RIS):

Para un polinomio denominador de grado 2, las raíces del polinomio denominador, q(x), son números imaginarios, $r_j=\alpha_j\pm\beta_j i,\quad \alpha_j,\beta_j\in R,\ i=\sqrt{-1}$. Para esas dos raíces imaginarias se plantea el cociente de polinomios anterior así:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Mx+N}{(x-\alpha_j)^2+\beta_j}.$$

Ejemplo: $\int \frac{x^2+4}{x^2+x+1}\cdot dx$

Como el polinomio numerador es del mismo grado que la del numerador, se procede a dividir los dos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^2 \quad + \quad 4 & x^2+x+1 \\ \hline -x^2-x-1 & 1 \\ \hline 0-x+3 & \end{array}$$

El cociente, Q(x), es 1 y el resto es $r(x)=-x+3$, por lo que la integral original se expresa como sigue:

$$\int\frac{x^2+4}{x^2+x+1}\cdot dx=\int\left(1+\frac{3-x}{x^2+x+1}\right)\cdot dx=\int dx+\int\frac{3-x}{x^2+x+1}\cdot dx=x+C+I_1$$

Se trata ahora de resolver la integral $I_1 = \int \frac{3-x}{x^2+x+1} \cdot dx$ como si fuera casi inmediata, aunque es racional, aprovechando las propiedades de las integrales:

$$I_1 = \int \frac{3-x}{x^2+x+1} \cdot dx = \int \frac{3}{x^2+x+1} \cdot dx - \int \frac{x}{x^2+x+1} \cdot dx = 3\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+x+1} \cdot dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} \cdot dx = 3\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \cdot dx - \int \frac{1}{x^2+x+1} \cdot dx\right] =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \cdot dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1} \cdot dx = \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \cdot dx =$$

$$= \frac{7}{2} I_2 - \frac{1}{2} \ln |x^2+x+1| + C_1$$

No ha podido resolverse $I_1 = \int \frac{3-x}{x^2+x+1} \cdot dx$, pues queda en función de una integral racional que no es inmediata, ara lo que se procede a obtener las raíces del polinomio denominador:

$$q(x) = x^2+x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Las raíces son imaginarias, con parte real e imaginaria $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A partir de estos valores, el polinomio denominador se puede expresar así:

$$x^2+x+1 = (x-\alpha)^2 + \beta^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Se sustituye en el integrando y se tiene una integral casi inmediata cuya primitiva será del tipo arco tangente:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1\right]} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1\right]} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C_2$$

Sustituyendo I_1 e I_2 en la integral original, su solución es:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2+x+1}\cdot dx = x + C + I_1 = x + C + \frac{7}{2}I_2 - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + C_1 = x - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| +$$

$$+\frac{7}{2}I_2 + C + C_1 = x + \ln|x^2+x+1|^{-\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C_2\right] + C + C_1 =$$

$$= x + \ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| + \frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C'$$

$$C' = C + C_1 + + C_2$$

d.- Raíces Imaginarias Múltiples (RIM): Las raíces del polinomio denominador, q(x), son números imaginarios, $r_j = \alpha_j \pm \beta_j i, \quad \alpha_j, \beta_j \in R,\ i = \sqrt{-1}$ y se repiten. Se utiliza el método de Hermite. En este curso no se abordan.

e.- Combinación de raíces reales simples, múltiples, e imaginarias. Se descompone en cociente en suma de cocientes tal y como se ha explicado en los casos anteriores.

Integrales irracionales.

Se entiende por integral irracional a aquella integral cuya función integrando contiene algún polinomio de primer grado o cociente de polinomios de primer grado bajo algún signo sub-radical.

El método para resolver este tipo de integrales consiste en un cambio de variable tras poner en forma de potencial los radicales e igualar el sub-radical a la nueva variable elevada al mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{x\cdot(1-x)^{1/2}}$

Cambio de variable:

$1 - x = t^2 \Rightarrow x = 1 - t^2 \Rightarrow dx = -2t\cdot dt$

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2t\cdot dt}{(1-t^2)\cdot(t^2)^{1/2}} = -2\int \frac{\cancel{t}\cdot dt}{(1-t^2)\cdot\cancel{t}} = -2\int \frac{dt}{(1-t^2)} = -2\cdot \operatorname{arcTh}(t) + C =$$

$$= -2\cdot \operatorname{arcTh}\left[\sqrt{1-x}\right] + C$$

INTEGRALES SIN PRIMITIVA.

Pese a todos los métodos explicados anteriormente, no es posible obtener la primitiva de todas las integrales, pues no existe una función cuya derivada sea la función integrando. Ejemplos:

$$\int e^{-x^2}\cdot dx\ ; \quad \int \frac{e^x}{x}\cdot dx$$

El cálculo de la integral en estos caso para el caso de la integral definida Riemann se hará por métodos numéricos, pues estas funciones son integrables siempre que estén definidas en [a, b]. La primera es continua en todo R al ser exponencial y su dominio R. La segunda es continua por ser el cociente de dos funciones integrables, por se continuas (una exponencial dividida por una polinómica), cuyo dominio es R siempre que no se anule el denominador, que sólo lo hace en x=0.

3.- APLICACIONES.

Se ha comentado que una de las primeras aplicaciones de la integración era el cálculo de áreas, en este apartado se presenta la aplicación del cálculo del área encerrada por dos curvas, cuya utilidad en el ámbito de la Economía está en su posibilidad de análisis dinámico de funciones de pérdidas y ganancias, funciones que recojan el superávit/déficit de balanzas de pagos, presupuestarios, etc.

Después se muestran a modo de ejemplo alguna de las aplicaciones de la Teoría de la Integración a la Economía, como la obtención de funciones totales a partir de las funciones marginales, como el análisis de funciones continuas que representan el comportamiento dinámico de ciertas variables económicas, así como la aplicación de la integración en operaciones financieras que utilicen leyes de capitalización o actualización continuas.

Además de las aplicaciones económicas, la integración definida tiene aplicación directa en el estudio de determinadas distribuciones de probabilidad, pero su estudio se reserva para otras materias de la titulación relacionadas con la Estadística.

APLICACIONES ECONÓMICAS.

Se muestran a continuación mediante un ejemplo una de las posibles aplicaciones de la integración indefinida en Economía.

<u>Obtención de una función total a partir de una función marginal.</u>

Ejemplo: Una empresa se dedica a la producción de un producto, cuya cuantía viene representada por q, y cuya función de coste marginal es:

$$C'(q) = 60q^2 - 80q + 35$$

El coste total fijo es de 75, $C(0) = 75$. Obtenga la función de coste total.

Solución:

$$\int C'(q) \cdot dq = \int (60q^2 - 80q + 35) \cdot dq = \int 60q^2 \cdot dq - \int 80q \cdot dq + \int 35 \cdot dq =$$
$$= 20q^3 - 40q^2 + 35q + K$$

Cualquiera de las funciones del conjunto de primitivas de C´(q) podría servir como función de coste total, ya que su derivada coincidiría con la función de coste marginal, pero la empresa no tiene infinitas funciones de coste total, sino sólo una, por lo que hay que obtener el valor concreto de K.

Como se conoce el coste fijo, es decir, el valor de la función de costes total para un punto dado, q = 0, se puede obtener el valor de K, que coincidirá con el de coste fijo.

$$\left.\begin{array}{l} C(q) = 20q^3 - 40q^2 + 35q + K; \quad C(0) = 75 \\ C(0) = 20(0)^3 - 40(0)^2 + 35(0) + K = 75 \Rightarrow K = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow C(q) = 20q^3 - 40q^2 + 35q + 75$$