MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS I

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1.- Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectúe si es posible :

a) A + B
b) B · A
c) $|B|$

2.- Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectúe si es posible :

a) A · B
b) B · A

3.- Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

4.- Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.- Si existe la inversa de A, obténgala

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

6.- Discuta y resuelva el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{array}\right\}$$

7.- Discuta y resuelva el sistema :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

8.- Discuta y resuelva los siguientes sistemas:
a)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIONES:

1.-

a) No es posible efectuar A+B pues se trata de dos matrices de distinto orden. La matriz A pertenece al conjunto de matrices de 2x3 (dos filas por tres columnas, M_{2x3}), mientras que B pertenece al conjunto de matrices de 3x2. (M_{3x2}). Para que dos matrices puedan sumarse deben ser del mismo orden, es decir, deben pertenecer al mismo conjunto de matrices.

b) B · A

Como $B \in M_{3x2}$ y $A \in M_{2x3}$, es posible efectuar el producto de la matriz de B por A, ya que el número de columnas de la matriz que pre-multiplica, B, coincide con el número de filas de la matriz que post-multiplica, A. El resultado será una matriz de 3x3. Se multiplican mediante el producto escalar los vectores fila de la matriz B por los vectores columna de la matriz A, colocando el escalar resultante como el elemento de la matriz producto correspondiente a la fila y columna multiplicadas. Es decir, el escalar resultante de multiplicar la segunda fila de B por la tercera columna de A, será el elemento a_{23} de la matriz B · A , (elemento de tercero de la segunda fila de B · A).

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

c) $|B|$.

Como B es una matriz de 3x2 no tiene el mismo número de filas que de columnas, no puede plantearse calcular su determinante. Sólo está definido el determinante de una matriz para el caso de matrices cuadradas (mismo número de filas que de columnas).

2.-

a) A · B

Como $A \in M_{2x3}$ y $B \in M_{3x4}$, es posible efectuar el producto de la matriz de A por B, ya que el número de columnas de la matriz que pre-multiplica, A, coincide con el número de filas de la matriz que post-multiplica, B. El resultado será una matriz de 2x4. Se multiplican mediante el producto escalar de los vectores fila de la matriz A por los vectores columna de la matriz B, colocando el escalar resultante como el elemento de la matriz producto correspondiente a la fila y columna multiplicadas. Es decir, el escalar resultante de multiplicar la segunda fila de A por la tercera columna de B, será el elemento a_{23} de la matriz A · B , (elemento de tercero de la segunda fila de A·B).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 17 \\ 3 & 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

b) B · A no es posible calcularlo, ya que este producto no puede llevarse a cabo al no coincidir el número de columnas de la matriz que pre-multiplica con el número de filas de la matriz que post-multiplica. ($B \in M_{3x4}$, y $A \in M_{2x3}$)

3.- Para resolver el determinante de la matriz A se puede emplear el método del desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (o columna).

El determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus correspondientes adjuntos. El adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada sería el determinante

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

donde D_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al suprimir en A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

Se podrían hacer operaciones entre filas o columnas de la matriz para que la fila o columna escogida contuviera el mayor número de ceros posible y, de esta manera, simplificar el número de adjuntos a calcular. Dada la matriz del ejercicio, prescindiendo de hacer esas operaciones entre filas o columnas, y desarrollando el determinante a partir de la primera fila queda :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-16-6-16+18) - (-3+12+8-9-8+4) = -20 - (4) = -24$$

4.- Para resolver el determinante de la matriz A se puede emplear el método del desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (o columna).

El determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus correspondientes adjuntos. El adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada sería el determinante

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

donde D_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al suprimir en A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

Esta vez, se operará entre filas o columnas de la matriz para que la fila o columna escogida contenga el mayor número de ceros posible, y de esta manera se reducirá el número de adjuntos a calcular. Dada la matriz del ejercicio, a la segunda columna se le va a restar la primera multiplicada por dos y a la cuarta columna se le va a restar la primera multiplicada por tres. La matriz resultante tiene el mismo determinante que la matriz original, pero con la ventaja de que el determinante de orden 4 se va a reducir a resolver un determinante en lugar de 4 de orden 3. Así se tiene que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -11 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -11 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 & -11 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -11 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (12 + 22 - 12) - (66 + 4 - 12) = -36$$

5.- Para saber si la matriz A admite inversa se calcula el determinante de A, pues en el caso de valer 0, la matriz A no admitirá inversa.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 18+4+3-2-12-9=2 \neq 0$$

Como es distinto de 0, para obtener la matriz inversa de la matriz A se puede emplear el método siguiente :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A^t)$$

donde A^{-1} es la matriz inversa de A; $|A|$ es el determinante de la matriz A; A^t es la matriz traspuesta de A, y adj (A^t) es la matriz adjunta de la traspuesta de A.

La traspuesta de una matriz es una matriz que resulta al intercambiar las filas por las columnas de la matriz original. Así, la matriz traspuesta de A de este ejercicio es :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de una matriz está formada por los adjuntos de cada elemento de la matriz original. El adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada sería el determinante

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

donde D_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al suprimir en A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

La matriz adjunta de la traspuesta de A es :

$$\operatorname{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa resultante será :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \operatorname{adj}(A^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6.- Discutir un sistema consiste en determinar si tiene o no solución, es decir, si es compatible o incompatible, y en el caso de que tenga solución, determinar si ésta es única (sist. compatible determinado) o si tiene infinitas soluciones (sist. compatible indeterminado). El **Teorema de Rouché-Frobenius** permite saber si el sistema tiene o no solución y, si la tiene, si es única o existen infinitas soluciones. El Teorema se basa en la comparación de los rangos de la matriz A (matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones), y la matriz A* (matriz de coeficientes del sistema ampliada con el vector columna de términos independientes del mismo).

Teorema

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$Ax = b$$

se tiene que si:

rg(A) < rg(A) ⇒ sistema incompatible*
rg(A) = rg(A) = nº incógnitas ⇒ sistema compatible determinado*
rg(A) = rg(A) < nº incógnitas ⇒ sistema compatible indeterminado* ♦

La matriz de coeficientes de este ejercicio es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz de 3x4, el rango máximo que puede alcanzar esta matriz es de 3 (3 filas ó 3 columnas linealmente independientes). Tomando las tres primeras columnas (y tres primeras filas), por ejemplo, se construye un 'menor' de orden tres que va a ser distinto de cero, lo que indicará que esas tres columnas (o filas) son linealmente independientes (es decir, que el vector nulo de R^3, (0,0,0) se expresa como combinación lineal de esos tres vectores de una única forma: con coeficientes nulos).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3-1+2-3-1-2 = -8 \neq 0$$

Por tanto, el rg(A) = 3.

La matriz ampliada será:

$$A^* = (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como A* es una matriz de 3x5 , el rango de A* será como mucho 3, y como contiene a la matriz A, el rango será como mínimo el de la matriz A, 3. Por tanto, la matriz ampliada en este ejercicio tiene rg(A*)= 3. Como rg(A)=rg (A*)=3 , el sistema es un sistema compatible, pero como el número de incógnitas, n, es 4, (x_1, x_2, x_3, x_4), mayor que el rango, el sistema es compatible indeterminado.

Se puede resolver aplicando la **Regla de Cramer**, tras adaptar el sistema para tratarlo como si fuera uno de Cramer. Para esto se pasan (n- rg(A)) variables al segundo término, dándole, a partir de entonces, al segundo término el tratamiento de "término independiente" para aplicar la Regla de Cramer.

Como n=4 y rg(A)=3 hay que pasar una variable al segundo término, por ejemplo, x_4 . De esta manera las otras tres variables tomarán valores en función de los que tome x_4 . El sistema queda como sigue :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 - x_4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 - 2x_4 \end{array}\right\}$$

La nueva matriz de coeficientes y el nuevo vector de términos independientes a considerar son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 - x_4 \\ 1 + x_4 \\ 4 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

Aplicando la Regla de Cramer nos quedarán los valores de x_1, x_2, x_3 en función de x_4 .

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 2 & -1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4-11}{-8} = \frac{11-3x_4}{8}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 1 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6x_4-6}{-8} = \frac{3(1-x_4)}{4}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 1 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7x_4-15}{-8} = \frac{15-7x_4}{8}$$

El determinante de la matriz A ya había sido obtenido como menor de la matriz de coeficientes original y valía -8. El conjunto de puntos de R^4 que son solución del sistema de ecuaciones planteado es el siguiente:

$$\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \ / \ x_1 = \frac{11-3x_4}{8} \ ; \ x_2 = \frac{3}{4}(1-x_4) \ ; \ x_3 = \frac{15-7x_4}{8}\right\}$$

7.- Como ya se ha visto en el ejercicio anterior, discutir un sistema consiste en determinar si tiene o no solución, es decir, si es compatible o incompatible, y en el caso de que tenga solución, determinar si ésta es única (sist. compatible determinado) o si tiene infinitas soluciones (sist. compatible indeterminado). El **Teorema de Rouché-Frobenius** permite saber si el sistema tiene o no solución, y si la tiene si es única o existen infinitas soluciones. El Teorema se basa en la comparación de los rangos de la matriz A (matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones), y la matriz A* (matriz de coeficientes del sistema ampliada con el vector columna de términos independientes del mismo).

La matriz de coeficientes de este ejercicio es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz de 3x4, el rango máximo que puede alcanzar esta matriz es de 3 (3 filas ó 3 columnas linealmente independientes). Tomando las tres primeras columnas (y tres primeras filas), por ejemplo, se construye un 'menor' de orden tres que va a ser distinto de cero, lo que indicará que esas tres columnas (o filas) son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3-2+2-3-1-4 = -11 \neq 0$$

Por tanto, el rg(A) = 3.

La matriz ampliada es:

$$A^* = (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como A* es una matriz de 3x5 , el rango de A* será como mucho 3, y como contiene a la matriz A, el rango será como mínimo el de la matriz A, 3. Por tanto, la matriz ampliada en este ejercicio tiene rg(A*)= 3. Como rg(A)=rg (A*)=3 , el sistema es un <u>sistema compatible</u>, pero como el número de incógnitas, n, es 4, (x_1, x_2, x_3, x_4), mayor que el rango, el sistema es compatible indeterminado.

Se puede resolver aplicando la **Regla de Cramer**, tras adaptar el sistema para tratarlo como si fuera uno de Cramer como en el problema anterior. Como n=4 y rg(A)=3 hay que pasar una variable al segundo término, por ejemplo, x_4 . De esta manera las otras tres variables tomarán valores en función de los que tome x_4 . El sistema queda como sigue :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 - x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 - 2x_4 \end{aligned}\right\}$$

La nueva matriz de coeficientes y el nuevo vector de términos independientes a considerar son :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 - x_4 \\ 1 + x_4 \\ 4 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

Aplicando la Regla de Cramer nos quedarán los valores de x_1, x_2, x_3 en función de x_4 .

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & 2 & -1 \\ 1+x_4 & -3 & 1 \\ 4-2x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{3x_4}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & -1 \\ 2 & 1+x_4 & 1 \\ 1 & 4-2x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9x_4 - 11}{-11} = 1 - \frac{9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-x_4 \\ 2 & -3 & 1+x_4 \\ 1 & 1 & 4-2x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10x_4 - 22}{-11} = 2 - \frac{10x_4}{11}$$

El determinante de la matriz A ya había sido obtenido como menor de la matriz de coeficientes original y valía -11. El conjunto de puntos de R^4 que son solución del sistema de ecuaciones planteado es el siguiente:

$$\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \ / \ x_1 = 1 - \frac{3}{11}x_4 \ ; \ x_2 = 1 - \frac{9}{11}x_4 \ ; \ x_3 = 2 - \frac{10}{11}x_4\right\}$$

8.-

a)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

La matriz de coeficientes de este ejercicio es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como es una matriz de 3x3, el rango máximo que puede alcanzar esta matriz es de 3 (3 filas ó 3 columnas linealmente independientes). Calculando el determinante de la matriz se tiene que es distinto de cero, en concreto es igual a -10, lo que indica que esas tres columnas (o filas) son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 6 - 6 - 4 + 1 = -10 \neq 0$$

Por tanto, el rg(A) = 3.

La matriz ampliada es

$$A^* = (A \,\vdots\, b) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como máximo su rango será 3 al ser una matriz de 3x4, y como contiene a la matriz A, el rango será como mínimo el de la matriz A, 3. Por tanto, la matriz ampliada en este ejercicio tiene rg(A*)=3. Como rg(A)=rg(A*)=3 , el sistema es un sistema compatible, y como el número de incógnitas, n, es 3, (x_1, x_2, x_3), igual que el rango, el sistema es compatible determinado.

Se puede resolver aplicando la **Regla de Cramer**. Matricialmente, al tratarse de un sistema de ecuaciones cuadrado, se tiene que

$$A\,x = b \Rightarrow x = A^{-1}\,b$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & 2/5 \\ -1/2 & 1/10 & 3/10 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes de este ejercicio es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como es una matriz de 3x3, el rango máximo que puede alcanzar esta matriz es de 3 (3 filas o 3 columnas linealmente independientes). Calculando el determinante de la matriz se tiene que es nulo, puede verse que la suma de las dos primeras filas del determinante da como resultado la tercera, lo que indica que esas tres columnas (o filas) son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 1 - 6 - 6 - 4 + 3 = 0$$

Por tanto, el rg(A) < 3. En concreto el rg(A) = 2, tomando el menor formado con las dos primeras filas y dos primeras columnas, el determinante es 5.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-1) = 5$$

La matriz ampliada

$$A^* = (A \,\vdots\, b) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Como máximo su rango será 3 al ser una matriz de 3x4, y como contiene a la matriz A, el rango será como mínimo el de la matriz A, 2. Formando un determinante de orden 3 con las dos primeras columnas y la cuarta, se tiene que es distinto de cero, por tanto, la matriz ampliada en este ejercicio tiene rg(A*)= 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 2 - 9 - 12 - 6 + 4 = -5 \neq 0$$

Como rg(A)=2 < rg(A*)=3 , el sistema es un sistema incompatible, por lo que no tiene solución.

última actualización 19-10-1999