

Tema 1.- Conceptes Bàsics

1) Simplifiqueu les expressions següents:

a) $a^3 b^2 a^5 b$

b) $(64x^3)^{2/3}$

c) $4^2(64)^{-4/3}$

d) $\sqrt[4]{x^{10}y^5}$

e) $\sqrt{x}\sqrt{xy^4}\sqrt[3]{x^6}$

f) $(\sqrt[5]{x^2y})^{5/3}$

g) $\frac{x^3y^5}{x^2y^8}$

h) $\frac{(x^{-1})^2(x^2)^5}{x^3x}$

i) $\left(\frac{x^{1/3}y^{2/3}}{z^2}\right)^3$

j) $\frac{x^3/y^4}{x^2/y^3}$

k) $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}x^{-3}}{\sqrt{25}x^2}\right)^2}$

l) $\frac{1}{\frac{x+h}{h}} + \frac{1}{x}$

2) Efectueu les operacions següents:

a) $(3x^2y+y^3+3) + 2(x^3-y-x^2y)$

b) $(x^2+x-2)*(x-1)$

c) $(x^2-y+3)*(x^3+y^{-1})^2$

d) $\frac{2}{x-4} - \frac{x^2}{x^2-3}$

e) $\frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1}$

f) $\frac{2(x-3)}{x^2-4} - \frac{x+3}{x-2}$

g) $\frac{3}{x+1} + 4$

h) $\frac{x}{x-2} * \frac{x^2-4}{x^3}$

3) Realitzeu la descomposició factorial dels polinomis següents. És a dir, transformeu-los en productes de monomis o polinomis de menor grau:

a) x^2-9

b) x^2-x-6

c) $x^2+8x+16$

d) $25x^2+20x+4$

e) $x^3-x^2-8x+12$

f) $x^4+x^3-7x^2-x+6$

4) Feu la divisió dels polinomis següents:

a) $(2x^3-14x-5) : (x-3)$

b) $(x^4-2x^2+3):(x^2-1)$

c) $(x-2x^3-3+3x^4):(2x^2-1)$

d) $(x^4-2x^2+x-3):(x^2-2x+1)$

5) Resoleu les equacions següents:

a) $(2x-1)^2 - 3x^2 = 2\left(\frac{1}{2} - 4x\right)$

b) $x+2 = \sqrt{4-x}$

c) $\frac{(x+1)^2}{x(x-1)} + \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} - 2\frac{3x+1}{x^2-1} = 0$

d) $x+2 = \sqrt{4x+13}$

e) $|x+2| = \sqrt{4-x}$

Realitzeu els tres exercicis següents considerant només el punt de vista formal. Al marge de la veritat o no del seu contingut concret.

- 13) Escriviu utilitzant fletxes d'implicació o equivalències
- l'equació $2x - 4 = 2$ es verifica quan $x = 3$
 - Si $x = 3$ aleshores $2x - 4 = 2$
 - l'equació $x^2 - 2x + 1 = 0$ se satisfà si $x = 1$
 - Si $x^2 > 4$, aleshores $x > 2$ o $x < 2$, i recíprocament
- 14) Raoneu si són certes les implicacions següents
- $x = 2$ i $y = 5$ implica $x + y = 7$
 - $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ implica $x = 1$
 - $x^2 + y^2 = 0$ implica $x = 0$ o $y = 0$
 - $xy = xz$ implica $y = z$
 - $x = 0$ i $y = 0$ implica $x^2 + y^2 = 0$
 - $x > y^2$ implica $x > 0$

Què passa amb els recíprocs?

- 15) Considereu la inequació $2x + 5 \geq 13$
- És $x \geq 0$ una condició necessària, suficient o ambdós per tal que la proposició siga certa?
 - I la condició $x \geq 50$?
 - I la condició $x \geq 4$?

Tema 2.- Àlgebra

1) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$ calculeu $3A+2B$ i $2A+B$

2) Calculeu els productes de matrius següents:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Calculeu els següents determinants:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \quad \text{g) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{h) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

4) Trobeu l'inversa de les matrius següents:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Decidiu per a quins valors del paràmetre t la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ no té inversa

6) Calculeu el rang de les matrius següents:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 6 & -9 & 8 & -7 & -11 \\ -12 & 14 & -13 & 12 & -9 \\ -12 & 2 & -4 & 6 & 0 \\ 6 & -13 & 11 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

7) Resoleu el sistema d'equacions lineals següent:
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 4x + y + 3z = 8 \end{cases}$$

8) Les funcions d'oferta i demanda d'un model de mercat amb 2 mercaderies són les següents:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= -2 + 3P_1 & Q_{d1} &= 10 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{s2} &= -1 + 2P_2 & Q_{d2} &= 5 + P_1 - P_2 \end{aligned}$$

Es demana calcular els preus d'equilibri (\bar{P}_1, \bar{P}_2) i les quantitats d'equilibri (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) .

9) Resoleu, pel mètode de Gauss, el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$$

10) Resoleu el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - w = 2 \\ x - y + z + w = 1 \end{cases}$$

11) Resoleu el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Tema 3.- Funcions elementals

1) Calculeu, sense usar la calculadora, el valor dels logaritmes següents:

$$\log_{10} \quad \log_{100} \quad \log_{64} 8 \quad \log_2(1/16)$$

2) Calculeu, fent ús de la calculadora, el valor dels logaritmes següents:

$$\ln 10 \quad \ln 3 \quad \log_5 66 \quad \log_3 7$$

3) Resoleu les equacions següents:

a) $2^x = 64$

b) $10^x - 10^{-x} = 2$

c) $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log 5$

d) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$

e) $\frac{2 \cdot 3^x - 5}{11} + \frac{3^{x+1} - 4}{5} = 3^x - 3$

f) $(\sqrt{2})^{x\sqrt{3}} = 2^{x+1}$

g) $2 \log(2x-2) = 1$

h) $4^x + 6 \cdot 4^x = 5$

i) $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$

j) $4^{2x} - 8 \cdot 4^x + 12 = 0$

k) $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$

l) $2^x + 4^x - 272 = 0$

m) $\sqrt[3]{a^{x+10}} = a^3$

n) $\sqrt[4]{a^x} = a^{3/5} \sqrt[5]{a^x}$

4) Resoleu els sistemes d'equacions següents:

a)
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 35 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\}$$

b)
$$\left. \begin{array}{l} 2^x 3^y = 25 \\ 3^x 5^y = 35 \end{array} \right\}$$

c)
$$\left. \begin{array}{l} 3^{2x} 2^{3y+1} = 8 \\ 2^{3x} 2^{2y-3} = 5 \end{array} \right\}$$

d)
$$\left. \begin{array}{l} 2^{x+1} = 128 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right\}$$

e)
$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 4 \\ \log x - \log y = 2 \end{array} \right\}$$

5) Utilitzeu la calculadora per a calcular els valors de: $\cos \pi/2$; $\cos 30^\circ$; $\sin 3\pi/2$

6) Sense usar la calculadora calculeu els valors de : $\cos 0$; $\operatorname{tag} 2\pi$; $\operatorname{sen} 90^\circ$

7) Expressen en radians els angles següents: 60° ; 50° ; 270° ; 420°

8) Expliqueu les diferències entre: $\cos x^2$, $\cos^2 x$, $\cos(x^2)$ y $(\cos x)^2$

9) Raoneu si són certes o no les igualtats següents:

a) $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$

b) $\sin(2x) = 2 \sin(x)$

c) $\sin(2x) = (\sin 2) * x$

d) $\sin(xy) = \sin x * \sin y$

10) Si $\sec \alpha = 2$ i $0 < \alpha < \pi/2$, calculeu les raons trigonomètriques restants de α .

11) Si $\sin \alpha = 0,3$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calculeu les raons trigonomètriques restants de α .

12) Si $\operatorname{tg} \alpha = 1$ i $\pi < \alpha < 3\pi/2$, calculeu les raons trigonomètriques restants de α .

13) Simplifiqueu l'expressió $\frac{1 + \operatorname{tag}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

14) Representeu gràficament les funcions següents:

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ 9 - x^2 & x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } F(x) = \begin{cases} 4x^2 & x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$$

15) Siguen $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^3 + x$. Calculeu:

a) $(f+g)(x)$	e) $(f/g)(x)$
b) $(f+g)(1/2)$	f) $(f \circ g)(x)$
c) $(4 \cdot f)(x)$	g) $(g \circ f)(x)$
d) $(f \cdot g)(x)$	h) $(g \circ f)(-3)$

16) Siguen les funcions:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ 9 + 4x & x > 2 \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 3 \\ x + 9 & x > 3 \end{cases}$$

Calculeu l'expressió de la funció $(f \circ g)(x)$. Representeu-la gràficament.

17) Un fabricant determina que el nombre total d'unitats produïdes cada dia d'un cert bé depèn del nombre d'empleats contractats (m) segons la funció següent:

$$q(m) = 40m - m^2$$

D'una altra banda, l'ingrés de l'empresa en funció de les quantitats produïdes vé donat per l'expressió:

$$I(q) = 30q - 25$$

Determineu la funció que calcula l'ingrés en funció del nombre d'empleats contractats. ¿Quina operació matemàtica s'ha realitzat?

18) Siguen $f(x) = -x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Estudieu si existeixen $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. En cas afirmatiu, calculeu-les.

19) Trobeu els dominis de les funcions següents:

a) $f(x) = x^2 - 10x + 1$	e) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$
b) $f(x) = e^{x^2 - 1}$	f) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 9}}$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$	
d) $f(x) = \ln(10x - x^2)$	

$$g) f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{1-x} & x < 2 \\ \frac{1}{1+x} & 2 \leq x \leq 5 \\ 6 & x > 5 \end{cases}$$

$$h) f(x) = \text{sen}\left(\frac{x+1}{x^2-2x}\right)$$

$$i) f(x) = e^{|x^2-3x+5|}$$

$$j) f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$$

$$k) f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

$$l) f(x) = \sqrt{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6}$$

$$m) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{x^2}}$$

$$n) f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{x^2-5x+4}}$$

$$o) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & x < 0 \\ \frac{x}{x^2-3x+2} & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{x}{12} & x > 5 \end{cases}$$

Tema 4.- Límits i Continuitat

1) Calculeu el valor dels límits següents:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 3}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -0.5} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$, siendo $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ 1 & x \leq 2 \end{cases}$

e. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 2 \\ 3x - 1 & x \neq 2 \end{cases}$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$

2) Siga la funció $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ 1 & x \leq 2 \end{cases}$. Representeu-la gràficament. Estudieu si és contínua en els punts $x=2$ y $x=6$.

3) Siga la funció $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 2 \\ 3x - 1 & x \neq 2 \end{cases}$. Representeu-la gràficament. Estudieu si és contínua en $x=2$.

4) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 7x + 10}$

5) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 3 & x = -1 \\ 2x + 3 & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{x - 3} & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{x - 5} & x > 5 \end{cases}$

6) Determineu si hi ha algun valor de a que faça contínua en \mathbf{R} la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

7) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

8) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & x < 0 \\ \frac{x}{x^2 - 3x + 2} & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{12}x & x > 5 \end{cases}$

9) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin x}{x^2 - 3x} & x \notin \{0, 3\} \\ 0 & x \in \{0, 3\} \end{cases}$

10) Raoneu si la funció següent pot ser contínua en el punt que s'indica:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \quad \text{quan } x = -1$$

11) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

12) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = |x - 3|$. Representeu-la gràficament.

13) Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Tema 5.- Derivades

1) Estudieu la derivabilitat en $x=0$ i $x=1$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ -x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

2) Estudieu la derivabilitat de $f(x) = |x - 2|$. Calculeu la funció $f'(x)$.

3) Estudieu la derivabilitat de $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$. Calculeu la funció $f'(x)$.

4) Estudieu la derivabilitat de $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ x - 2 & 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 4 & x > 4 \end{cases}$

5) Estudieu la derivabilitat de $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

6) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$

Càlcul de derivades

Calculeu la derivada de les funcions següents:

7) $y = x^{10} + 2x^4 - x^3$

8) $y = \frac{3}{4}x^4 + 2$

9) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$

10) $y = \frac{2x+5}{3}$

11) $y = x^{-7}$

12) $y = x^{-2}$

13) $y = x^{\frac{1}{3}}$

14) $y = x^{-\frac{1}{3}}$

15) $y = \frac{1}{x^4}$

16) $y = (x^3 + 2x^2)^7$

17) $y = (2x^2 + x + 1)^4$

18) $y = \sqrt{x}$

19) $y = \sqrt[3]{x}$

20) $y = \sqrt[3]{x^4}$

21) $y = 2\sqrt[5]{x^4 - 1}$

22) $y = \frac{1}{3\sqrt{x}}$

23) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

24) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

25) $y = (x^2 + 3x^4)(2x^3 + x^7 + 5)$

26) $y = (2x^{\frac{-1}{4}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}})(x^2 + x^4)$

27) $y = (x^2 - x + 1)\sqrt{1 - x^2}$

28) $y = x^2 + \sqrt{x^3 - 2}$

29) $y = \frac{x^2 - 3}{x^3 - x}$

30) $y = \frac{x^4 + 1}{2x^2 + 1}$

31) $y = \frac{x - 1}{x^3}$

32) $y = \frac{1}{x^3 + x^2 + 2}$

33) $y = \frac{1}{x}$

34) $y = \frac{2x - 5x^2 + x^3}{(2x - 8)(3x - 4)}$

35) $y = \frac{(2x + 3)^3}{(3x^2 - 2x + 6)^2}$

36) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

37) $y = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

38) $y = \frac{\sqrt{3x-5}}{\sqrt{5x^2-5x+4}}$

39) $y = \ln(3x)$

40) $y = \ln(x^2 + 1)$

41) $y = \log(5x + 2)$

42) $y = 3^x$

43) $y = 5^{x7^x}$

44) $y = \frac{3^x}{6^x}$

45) $y = 25^{x^2+x+1}$

46) $y = e^{x^2} + 3x$

47) $y = e^x$

48) $y = \text{sen}(3x+1)$

49) $y = \text{sen}(\ln x)$

50) $y = \frac{\text{sen} x}{3}$

51) $y = \text{sen}(\text{sen} x)$

52) $y = \text{sen}(3^x)$

53) $y = \cos(\text{sen} x)$

54) $y = \text{sen}^3(x^2 + 2)$

55) $y = \text{sen} \frac{x+1}{x-1}$

56) $y = x^2 \cos(8x)$

57) $y = x^2 \cos 8$

58) $y = \cos(x^2) \text{sen}(x)$

59) $y = \frac{e^x \cos x}{\ln x}$

60) $y = \frac{\cos x}{x^2 + 2x}$

61) $y = \cos^2 x + \text{tg}(x^{-7})$

62) $y = xe^{3x+1}$

63) $y = \text{arctg}(x^2 + x)^7$

64) $y = (x^2 + 2x - 3)^{3x-1}$

65) $y = (\text{sen}(x^2 + 1))^{\ln x}$

66) $y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

67) $y = \ln(\text{sen}^{1/4} x)$

68) $y = (\text{sen} x)^{\cos x}$

69) $y = \text{sen}^2(x^2 + 1)^2$

$$70) y = \cos(\cos(\cos x))$$

$$71) y = x^{\cos^2 x}$$

$$72) y = \sqrt{\ln(\operatorname{tg}(x^2 - 3))}$$

$$73) y = \sqrt[4]{\cos x}$$

$$74) y = \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

$$75) y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$76) y = \sqrt{\sin x}$$

$$77) y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$78) y = 5^{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$79) y = \sqrt[7]{x^2 - 2x}$$

$$80) y = \sin\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

$$81) y = (\cos x)^{\ln(x^2 + 1)}$$

$$82) y = (x^3 + 2x + 1)^{x^2 - 1}$$

$$83) y = 3^{\left(\frac{x \sin x - x^2}{1 - x^2}\right)}$$

$$84) y = (\sin x)^{x^2 \sin x}$$

Aplicacions de la derivada

85) Estudieu i representeu la funció $f(x) = x^2 - 5x + 6$

86) Estudieu i representeu la funció $f(x) = |x^2 - 7x + 10|$

87) Estudieu i representeu la funció $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

88) Estudieu i representeu la funció $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

89) Estudieu i representeu la funció $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

90) Estudieu i representeu la funció $f(x) = 10xe^{x-1}$

91) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-5x}}{\sin(7x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin(2x) - x}{4x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\operatorname{tg}(3x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x + 1|}{x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln(e^{3x} - 1)}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{7x^2 - 10x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{7x^3 - 2x + 1}$

92) Calculeu els límits següents :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-5} \right)^{2n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+7}$

93) Trobeu el polinomi de Taylor d'ordre 3 associat a $f(x) = xe^{2x}$ en $x = 0$

94) Trobeu el polinomi de Taylor d'ordre 5 associat a $f(x) = \frac{1}{x+3}$ en $x = 1$

95) Trobeu el polinomi de McLaurin d'ordre 3 associat a $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

96) Trobeu el polinomi de Taylor d'ordre 3 associat a $f(x) = \operatorname{tg} x$ en $x = \pi/4$

97) Siga $C(x) = x^2 + 3x + 100$ la funció de costos d'una empresa. Proveu que la taxa mitjana de variació quan x varia de 100 a $100+h$ és

$$\frac{C(100+h) - C(100)}{h} = 203 + h \quad (h \neq 0).$$

Quin és el cost marginal $C'(100)$?

98) Si l'estalvi total d'un país és una funció $S(Y)$ del producte nacional Y , aleshores $S'(Y)$ es diu *propensió marginal a l'estalvi (PME)*. Trobeu la PME per a les funcions següents:

a) $S(Y) = a + bY$

b) $S(Y) = 100 + 10Y + 2Y^2$

99) Suposem que la relació entre la renda bruta Y i el total dels impostos T sobre la renda dels contribuents amb renda entre 80.000 i 120.000 € està donada per l'equació $T = a(bY + c)^p + kY$ on a, b, c, p i k són constants positives.

a) Trobeu una expressió del tipus marginal de l'impost, dT/dY .

b) Un estudi empíric va deduir les estimacions següents de les constants esmentades:

$$a=0,000338 ; b=0,81 ; c=6.467 ; p=1,61 ; k=0,053$$

Utilitzeu estes quantitats per a trobar els valors de T y dT/dY quan $Y=100.000$

100) Trobeu l'elasticitat de $f(x) = ax^b$ ($a \neq 0$ i b són constants).

- 101) La funció de costos d'una empresa determinada ve donada per l'expressió $C(x) = 3\sqrt{x^3} - 3x + 10$, on x és la quantitat de factor productiu. Determineu quin valor de x minimitza el cost de l'empresa i quin és el cost mínim associat.
- 102) Donada la funció de beneficis d'una empresa $B(x) = xe^{x-x^2}$ on x és la quantitat produïda d'un cert ben, calculeu on s'arriba al màxim benefici.
- 103) La funció de costos d'una empresa que produeix un ben en quantitat x és $C(x) = e^{x^2-5x+4}$. Es demana:
- Determineu el domini matemàtic i el domini econòmic d'esta funció, i analitzeu el seu creixement i decreixement.
 - Per a quina producció és mínim el cost de l'empresa? Quin és el cost mínim?
- 104) La funció de costos d'un article determinat és $C(x) = 30 + 10x - 2x^2$, comptada en milers d'euros, i el preu unitari de l'article ve donat per l'expressió $p(x) = 60 - 2x$ on p ve expressat en euros. Determineu:
- Els dominis de definició de les dos funcions.
 - El cost marginal.
 - La funció d'ingressos.
 - La funció d'utilitat $U=I-C$.
 - L'ingrés marginal.
 - La utilitat marginal.

Tema 6.- Calculo de Primitivas

Integrals Immediates

Calculeu les integrals immediates següents:

1) $\int (x^2 + 3x^3 - \frac{1}{x}) dx$

2) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

3) $\int \text{sen}(5x) e^{\cos 5x} dx$

4) $\int x^3 6^{x^4+3} dx$

5) $\int \frac{dx}{\text{tg}(x)}$

6) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

7) $\int \text{sen}(2x-3) dx$

8) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

9) $\int (\frac{3}{x} - \frac{x}{3}) dx$

10) $\int (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - x^4) dx$

11) $\int \frac{(2x-1)^2}{2x} dx$

12) $\int \frac{x+2}{2\sqrt{x+2}} dx$

13) $\int (\cos 2x - \text{sen} 3x) dx$

14) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

15) $\int \frac{\text{sen} x}{1+\cos^2 x} dx$

16) $\int \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} dx$

17) $\int \frac{2}{1+x^2} dx$

18) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x} dx$

19) $\int (4x+2)(x-1) dx$

20) $\int x \cos(-5x^2-3) dx$

21) $\int (x^2+1) \cos(x^3+3x) dx$

22) $\int (\text{sen} x + e^x - \frac{1}{x}) dx$

23) $\int x^2(3x^3+14)^3 dx$

24) $\int \sqrt[5]{5x+6} dx$

25) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{3x^2+2}} dx$

26) $\int \frac{dx}{(2x-5)^4}$

27) $\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}} dx$

28) $\int \sqrt{x^2-2x^4} dx$

29) $\int \frac{7\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

30) $\int \sqrt[5]{5x+6} dx$

31) $\int \frac{3^{\ln 3x}}{x} dx$

32) $\int \frac{\text{sen} x - \cos x}{\text{sen} x + \cos x} dx$

33) $\int \frac{3x}{x^2-3} dx$

34) $\int \frac{3^{3x+2}}{3^{3x+2}-3} dx$

35) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

36) $\int \frac{dx}{(\cos x)^2 \operatorname{tg} x}$

37) $\int (x^3 - \frac{1}{x} + x) dx$

38) $\int \operatorname{tg} x dx$

39) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

40) $\int \frac{dx}{(3x-1)^5}$

41) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-10}} dx$

42) $\int \frac{2e^x}{1+e^{2x}} dx$

43) $\int 3^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$

Càlcul Integral

44) Calculeu les integrals següents:

a.

$$\int \frac{dx}{x^2+3}$$

b. $\int \frac{dx}{9x^2+1}$

c. $\int \frac{dx}{5x^2+2}$

d. $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b}$

45) Calculeu les integrals següents (per parts):

a. $\int x \cos x dx$

d. $\int \ln x dx$

g. $\int e^x \sin x dx$

b. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

e. $\int \operatorname{arctg}(x) dx$

h. $\int x^2 \sin(2x) dx$

c. $\int \operatorname{arctg}(3x) dx$

f. $\int x^2 e^x dx$

46) Calculeu les integrals racionals següents:

a. $\int \frac{x}{x^3-2x^2-x+2} dx$

b. $\int \frac{x-4}{x^4-10x^3+35x^2-50x+24} dx$

c. $\int \frac{2x-1}{x^3-x^2} dx$

d.

$$\int \frac{x}{x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x-4} dx$$

i. $\int \frac{x^4}{x^2-3x+2} dx$