NOTAS SOBRE EL PRODUCTO MATRICIAL

- El producto de matrices no es conmutativo, es decir, el orden de los factores SÍ que altera el resultado del producto, hasta incluso a ocasionar que no exista el producto.
- Para que dos matrices se puedan multiplicar, A·B, se debe cumplir que la matriz que pre-multiplica, A, tenga el mismo número de columnas que filas tenga la que post-multiplica, B. Una matriz de n filas y m columnas, puede pre-multiplicar a otra de m filas y p columnas, por ejemplo. Una matriz de 3 (filas) x 5 (columnas), puede multiplicar a otra de 5(filas) x 2 (columnas).
- El resultado del producto matricial, cuando sea posible, da como resultado una matriz que tiene el mismo número de filas que la que pre-multiplica y el mismo número de columnas que la que post-multiplica. Así, por ejemplo, el producto de una matriz A de 3x5 por una matriz B de 5x2 da como resultado una matriz, llamémosla C, de 3x2.
- Los elementos de la matriz producto resultante se obtienen mediante el producto escalar de los vectores fila de la matriz que pre-multiplica por los vectores columna correspondientes de la matriz que pos-multiplica. Así, siguiendo con el ejemplo anterior, si una matriz A de 3x5 multiplica a una matriz B de 5x2, el resultado es una matriz de 3x2, es decir, con tres filas y dos columnas, o lo que es lo mismo, con seis elementos, números reales, organizados en tres vectores fila de dos elementos, de R^2. Para obtener cada uno de los 6 elementos de esa matriz producto, se deben realizar 6 productos escalares de dos vectores, una fila de A por una columna de B. Así, para obtener el primer elemento del primer vector fila de la matriz producto C, c_{11}, se multiplica el primer vector fila de A por el primer vector columna de B. Para obtener c_{12}, se multiplica la primera fila de A por la segunda columna de B. Para obtener c_{21}, se multiplica la segunda fila de A por la primera columna de B. Para obtener c_{22}, se multiplica la segunda fila de A por la segunda columna de B. Para obtener c_{31}, se multiplica la tercera fila de A por la primera columna de B. Para obtener c_{32}, se multiplica la tercera fila de A por la segunda columna de B.

$$A \cdot B = C$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ b_{51} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} + a_{15}b_{51}$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \\ b_{52} \end{bmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} + a_{15}b_{52}$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ b_{51} \end{bmatrix} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} + a_{25}b_{51}$$

$$\vdots$$

$$c_{32} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \\ b_{52} \end{bmatrix} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} + a_{35}b_{52}$$

- El producto escalar de dos vectores es posible si los dos vectores pertenecen al mismo espacio vectorial, R^n, es decir, tienen el mismo número de elementos, y proporciona un escalar (un número real), resultante de sumar el producto de elemento a elemento de los dos vectores (primer elemento del vector 1por primer elemento del vector 2, más segundo elemento del vector 1 por segundo elemento del vector 2, más tercer elemento del vector 1por tercer elemento del vector 2, y así sucesivamente hasta multiplicar los n elementos)

Ejemplos:
a) A y B no se pueden multiplicar ni en un sentido ni en otro, pues A·B no existe por no coincidir el número de columnas de A con el número de filas de B. Tampoco existe B·A, pues no coincide el número de columnas de B con el número de filas de A.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Para las nuevas matrices *A* y *B*, calcule *C* = *A*·*B*. Como coincide el número de columnas de *A* con el número de filas de *B*

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\\0&3&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

Solución: $C=A\cdot B$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\\0&3&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\\0&3&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&-3\\1&1\end{bmatrix}$$

Con

$$c_{11}=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0+0\cdot0+(-1)\cdot1=0$$

$$c_{12}=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=1\cdot0+0\cdot(-1)+2\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot0=2$$

$$c_{21}=\begin{bmatrix}0&3&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=0\cdot1+3\cdot0+0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1=0$$

$$\vdots$$

$$c_{32}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=0\cdot0+0\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot0+1\cdot0=1$$