FUNCIONES HOMOGÉNEAS (ESQUEMA)

1.- Concepto y propiedades.

1.1.- Concepto
- Definición de cono
- Definición de función homogénea
- Interpretación económica de la función homogénea

1.2.- Propiedades (Operaciones con funciones homogéneas)
- Suma de funciones homogéneas
- Producto de un escalar por una función homogénea
- Combinación lineal de funciones homogéneas
- Producto de funciones homogéneas
- Cociente de funciones homogéneas
- Derivación de una función homogénea
- Reducción a una función de (n-1) variables

2.- Teorema de Euler. Interpretación económica.

2.1.- Teorema de Euler
2.2.- Teorema de Euler y teoría de la distribución

Problemas resueltos
Problemas propuestos
Bibliografía

FUNCIONES HOMOGÉNEAS

1. Concepto y Propiedades

1.1.- Concepto

Definición de cono (en un espacio vectorial real)

Se llama *cono* a todo conjunto $C \subseteq R^n$ que cumple la siguiente condición:

$$t\,x \in C,\ \forall x \in C,\ \forall t > 0.$$

Definición de función homogénea

Dada una función real de n variables tal que f: $D \subset R^n \to R$, en donde su dominio es un *cono* , se dice que es *homogénea de grado r* si verifica:

$$f(t\,x) = t^r f(x),\ \forall x \in D \ \text{ con } \ t>0,\ r \in R$$

NOTA 1: Se exige que D sea un cono para garantizar que $t\,x \in D$.

NOTA 2: Justificación de $t > 0$:

- Evita problemas de falta de definición o inexistencia:

$$f(t\,x) = t^r f(x).$$

$$\text{Ejemplo : Si } r = \frac{1}{2} \ \text{ y } \ t < 0 \ \Rightarrow f(t\,x) \notin R.$$

- Interpretación económica: Al trabajar con determinadas variables económicas (cantidades a consumir, a emplear o a producir, por ejemplo), el sentido económico impone su no negatividad, por lo que con $t > 0$ se tiene garantizado que $t\,x_i$ va a seguir manteniendo ese mismo sentido económico.

$$x_i \geq 0 \ \text{ y } \ t > 0 \Rightarrow t\,x_i \geq 0 \text{ (sentido económico).}$$

NOTA 3: $r \in R \Rightarrow r$ puede ser positivo o negativo; entero, racional o irracional.

Si r es entero (positivo o negativo), $t > 0$ es una restricción superflua. El valor de r tiene importancia a la hora de la interpretación económica de funciones homogéneas.

Ejemplo 1:

$$f(x,y,z) = 3x + 2yz.$$

Al tratarse de una función polinómica, su dominio es R^3, y por tanto es un cono.

$$f(t\,x, t\,y, t\,z) = 3\,t\,x + 2\,(t\,y)(t\,z) = t\,(3\,x + 2\,\underline{\mathbf{t}}\,y\,z).$$

Esta función no es homogénea.

Ejemplo 2:

$$f(x, y) = \sqrt{2x + y}\,.$$

Su dominio es el conjunto $D=\{(x,y)\in R^2 / 2x+y\geq 0\}$, que es un cono, pues multiplicando la restricción que cumplen los puntos $(x,y) \in D$ por una cantidad positiva, $t>0$, el sentido de la restricción no cambia

$$t\,(2x+y) \geq t\,0 \;\Rightarrow\; t\,2\,x + t\,y \geq 0 \;\Rightarrow\; 2(t\,x)+(t\,y) \geq 0 \;\Rightarrow (t\,x, t\,y)\in D.$$

Estudiando si es homogénea:

$$f(t\,x,t\,y)=\sqrt{2\,t\,x+t\,y}=\sqrt{t\,(2x+y)}\;=\sqrt{t}\,\sqrt{2x+y}=t^{1/2}\,f(x,y).$$

La función es homogénea de grado $r = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 3:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2\,x^4 + 3\,y^4}\,.$$

Su dominio es el conjunto $D = R^2 - \{(0,0)\}$, que es un cono. Se estudia si es homogénea:

$$f(t\,x,t\,y)=\frac{(t\,x)^2\,(t\,y)^2}{2\,(t\,x)^4+3(t\,y)^4}=\frac{t^2\,x^2\,t^2\,y^2}{2\,t^4\,x^4+3\,t^4\,y^4}=\frac{t^4\,x^2\,y^2}{t^4(2x^4+3\,y^4)}=$$
$$=\frac{x^2\,y^2}{2\,x^4+3\,y^4}=f(x,y)=t^0\,f(x,y), \quad \forall(x,y)\in D,\; t>0\;\Rightarrow r=0.$$

Por tanto, la función es homogénea de grado 0.

Ejemplo 4:

$$f(x,\;y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\,.$$

Su dominio también es el conjunto $D = \{R^2 - (0,0)\}$, que es un cono.

$$f(t\,x,t\,y)=\frac{1}{(t\,x)^2+(t\,y)^2}=\frac{1}{t^2\,x^2+t^2\,y^2}=\frac{1}{t^2\,(x^2+y^2)}=t^{-2}\;f(x,y)$$

$$\forall(x,y)\in D,\;\; t>0 \qquad \Rightarrow\; r=-2.$$

Por tanto, la función es homogénea de grado -2.

Interpretación económica de la función homogénea

- EL FENÓMENO DE LA "ILUSIÓN MONETARIA":

Función de demanda del bien x

$$x\;(p_1\,,\,p_2,\,...,\,p_n,\,y_d),$$

donde

p_1 es el precio del bien x,
$p_2, ..., p_n$ son los precios bienes sustitutivos y complementarios,
y_d es la renta nominal disponible.

Si la función es homogénea de grado r:

$$x\;(t\,p_1\,,\,t\,p_2,\,...,\,t\,p_n,\,t\,y_d) = t^r\,x\;(p_1\,,\,p_2,\,...,\,p_n,\,y_d),$$

según los valores de r:

$r = 0 \;\Rightarrow$ Ausencia de "ilusión monetaria". El consumidor tiene en cuenta su renta real y no varía su demanda.

$r > 0 \;\Rightarrow$ "ilusión monetaria". x BIEN NORMAL (El consumidor aumenta su demanda por creer aumentada su renta real)

$r < 0 \;\Rightarrow$ "ilusión monetaria". x BIEN INFERIOR (El consumidor disminuye su demanda por creer aumentada su renta real).

- RENDIMIENTOS A ESCALA EN FUNCIONES DE PRODUCCIÓN:

Función de producción del bien q:

$$q\;(k_1\,,k_2,\,...,\,k_n),$$

donde

$k_1, ..., k_n$ son las unidades empleadas de factores productivos.

Si es homogénea de grado r:

$$q\ (t\, k_1\ , t\, k_2, ..., t\, k_n) = t^r\ q\ (k_1\ , k_2, ..., k_n),$$

según los valores de r:

$r = 1 \Rightarrow$ Rendimientos constantes a escala (homogeneidad lineal)

$r < 1 \Rightarrow$ Rendimientos decrecientes a escala. Caso concreto $r = 0$:

$r = 0 \Rightarrow$ Aumentar t veces los inputs no hace variar la cantidad producida.

$r > 1 \Rightarrow$ Rendimientos crecientes a escala.

Ejemplo 5: **Función de Producción Cobb-Douglas**

$$Q(K,L)= A\, K^{\alpha}\, L^{\beta},$$

donde

A es una constante positiva, $A>0$,

L y K son las unidades de factor trabajo y factor capital empleadas,

$\alpha, \beta \in R \,/\, \alpha, \beta >0$.

El dominio en sentido económico se puede demostrar que es un cono:

$$D_Q = \{(K,L) \in R^2 \,/\, K \geq 0;\ L \geq 0\}.$$

Esta función de producción Cobb-Douglas es homogénea de grado $(\alpha+\beta)$ como se puede ver a continuación:

$$Q(t\, K, t\, L)= A\, (t\, K)^{\alpha}\, (t\, L)^{\beta} = A\, t^{\alpha}\, K^{\alpha}\ t^{\beta}\, L^{\beta} =$$

$$= A\, t^{\alpha+\beta}\, K^{\alpha}\, L^{\beta} = t^{\alpha+\beta}\, (A\, K^{\alpha}\, L^{\beta}) = t^{\alpha+\beta}\, Q(K,L)$$

La función de producción Cobb-Douglas refleja:

- Rendimientos constantes a escala si $(\alpha+\beta)=1$.

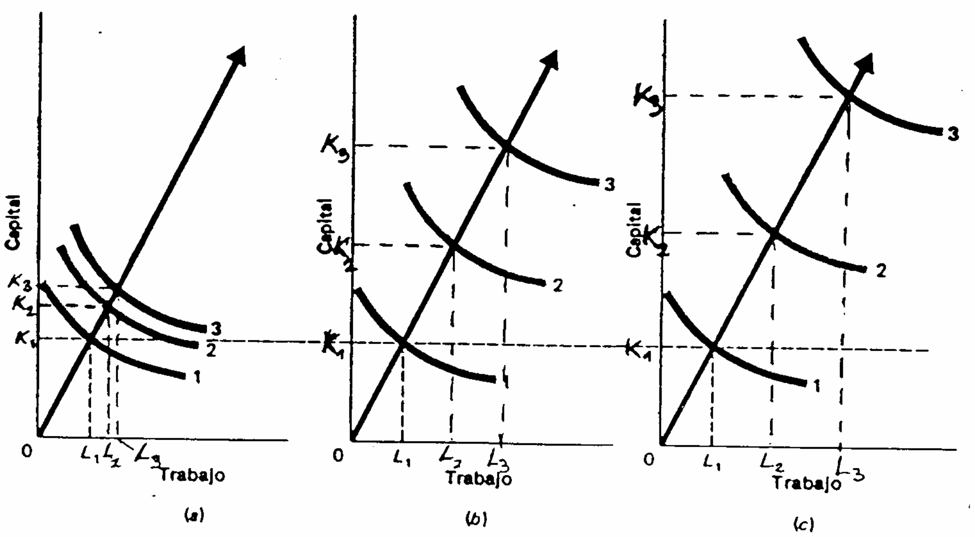
- Rendimientos crecientes a escala si $(\alpha+\beta)>1$.

- Rendimientos decrecientes a escala si $(\alpha+\beta)<1$.

- RENDIMIENTOS A ESCALA E ISOCUANTAS:

Isocuanta: $Q(K,L)= C$.

Recoge las combinaciones de K y L que proporcionan un nivel de producción igual a C.



(a) Rendimientos crecientes: $(K_1 -0)> (K_2-K_1)> (K_3-K_2)$; $(L_1 - 0)> (L_2-L_1)> (L_3-L_2)$.
(b) Rendimientos constantes : $(K_1 -0)= (K_2-K_1)= (K_3-K_2)$; $(L_1 - 0)= (L_2-L_1)= (L_3-L_2)$.
(c) Rendimientos decrecientes : $(K_1 -0)< (K_2-K_1)<(K_3-K_2)$; $(L_1 - 0)< (L_2-L_1)< (L_3-L_2)$.

1.2.- Propiedades (operaciones con funciones homogéneas)

1) Suma de funciones homogéneas

Sean f y g dos funciones homogéneas del mismo grado r tales que:

$$f: D \subseteq R^n \to R; \; g: D \subseteq R^n \to R.$$

Entonces la función suma $(f+g) : D \subseteq R^n \to R$ es homogénea de grado r.

Demostración:

$$(f+g)(tx)= f(tx)+g(tx) = t^r f(x) + t^r g(x) = t^r [f(x)+g(x)] = t^r (f+g)(x).\blacksquare$$

2) Producto de un escalar por una función homogénea

Sea $f: D \subseteq R^n \to R$ una función homogénea de grado r. Sea k un número real, $k \in R$.

Entonces la función resultante del producto del escalar k por la función f

$$(k\, f) : D \subseteq R^n \to R$$

es homogénea de grado r.

Demostración:

$$(k\, f)(tx)= k\, f(tx) = k\, t^r f(x) = t^r [k\, f(x)] = t^r (k\, f)(x). \;\blacksquare$$

3) La combinación lineal de funciones homogéneas

Sean f y g dos funciones homogéneas del mismo grado r tales que:

$$f: D \subseteq R^n \to R \; ; \; g: D \subseteq R^n \to R.$$

Sean α, β números reales, $\alpha, \beta \in R$.

Entonces la combinación lineal de las mismas

$$(\alpha f+\beta g) : D \subseteq R^n \to R$$

es homogénea de grado r.

Demostración:

Por las dos propiedades anteriores.$\blacksquare$

NOTA: Se puede deducir de esta propiedad que el conjunto de funciones homogéneas de un mismo grado forman un subespacio vectorial (de dimensión infinita).

Ejemplo 6:

Los ingresos de una empresa consisten en lo que obtiene por la venta de su producto a un precio ***p*** más una subvención de 5 unidades monetarias por cada unidad de trabajo empleada. Si la función de producción de esta empresa presenta rendimientos constantes a escala, estudie si la función de ingresos es homogénea y de qué grado.

Solución:

La función de ventas sería el precio por la producción

$$V(K,L)= p\, Q(K,L)$$

Como Q(K,L) es homogénea de grado 1, al multiplicarla por el precio se tiene una función de ventas que también es homogénea de grado 1.

La subvención obtenida es una función lineal sin término independiente y, por tanto, es homogénea de grado 1.

$$Sub(K,L)= 5L.$$

La función de ingresos, pues, es la suma de dos funciones homogéneas de grado 1 definidas en el mismo conjunto, por lo que también será homogénea de grado 1.

$$I(K,L) = V(K,L) + Sub(K,L).$$

<u>4) Producto de funciones homogéneas</u>

Sean f y g dos funciones reales homogéneas de grado r y s, respectivamente, tales que:

$$f: D \subseteq R^n \to R;\ g: D \subseteq R^n \to R.$$

Entonces el producto de ambas

$$(f \cdot g) : D \subseteq R^n \to R$$

es una función homogénea de grado (r+s).

Demostración:

$$(f \cdot g)(tx)= f(tx) \cdot g(tx) = t^r f(x) \cdot t^s g(x) = t^r t^s [f(x) \cdot g(x)] = t^{r+s} (f \cdot g)(x). \blacksquare$$

Ejemplo 7:

Si f: $R^2 \to R$ es una función homogénea de grado r, pruebe que es homogénea la siguiente función y obtenga su grado:

$$g(x,y) = x\,y\,f(x,y).$$

Solución:

$$g(t\,x,\, t\,x) = t\,x\,t\,y\,f(t\,x,\, t\,y)= t^2\,x\,y\,t^r\,f(x,\, y) = t^{2+r}\,x\,y\,f(x,\, y)= t^{2+r}\,g(x,\, y),$$

g es homogénea de grado (2+r).

Este resultado es el que se obtendría considerando a g(x,y) como el producto de dos funciones homogéneas f(x,y) y h(x,y)= x y (homogénea de grado 2).

<u>*5) Cociente de funciones homogéneas*</u>

Sean f y g dos funciones reales homogéneas de grado r y s, respectivamente, tales que:

$$f\colon D \subseteq R^n \to R;\ g\colon D \subseteq R^n \to R.$$

Entonces el cociente de ambas, cuando esté definido, es una función

$$\left(\frac{f}{g}\right): D^* \subseteq R^n \to R$$

homogénea de grado (r-s).

Demostración:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(tx)=\frac{f(tx)}{g(tx)}=\frac{t^r f(x)}{t^s g(x)}=t^{r-s}\,\frac{f(x)}{g(x)}=t^{r-s}\left(\frac{f}{g}\right)(x).\blacksquare$$

<u>*6) Composición de funciones homogéneas*</u>

Sean $f{:}D_f \subseteq R \to R$ y $g\colon D_g \subseteq R^n \to R$ dos funciones homogéneas de grado r y s, respectivamente, tales que:

$$g(D_g) \subseteq D_f .$$

Entonces la composición de g con f, $(f\circ g)(x)= f\,[g(x)]$

$$(f\circ g)\colon D_g \subseteq R^n \to R$$

es una función homogénea de grado $(r \cdot s)$.

Demostración:

$$(f \circ g)(t\,x) = f[g(t\,x)] = f[t^{s}\,g(x)] = (t^{s})^{r}\,f[g(x)] = t^{r \cdot s}\,(f \circ g)(x). \blacksquare$$

<u>*7) Derivación de una función homogénea*</u>

Sea f una función homogénea de grado r tal que:

$$f: D \subseteq R^{n} \to R; \quad y \;\; f \in C^{q}(D).$$

Entonces sus derivadas parciales de orden p, siendo $p \leq q$, son funciones homogéneas de grado $(r-p)$.

Demostración:

Se va a realizar la demostración por inducción finita a partir de las derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \lim_{h \to 0} \frac{f(tx_1,\ldots,tx_i+h,\ldots,tx_n) - f(tx_1,\ldots,tx_i,\ldots,tx_n)}{h}.$$

Por ser f homogénea de grado r se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \lim_{h \to 0} \frac{t^{r} f(x_1,\ldots,x_i+\frac{h}{t},\ldots,x_n) - t^{r} f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{t^{r}\left[f(x_1,\ldots,x_i+\frac{h}{t},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{\substack{\frac{h}{t} \to 0 \\ t>0}} t^{r-1}\,\frac{f(x_1,\ldots,x_i+\frac{h}{t},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{\frac{h}{t}} =$$

$$= t^{r-1}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Lo que prueba que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ es homogénea de grado (r-1), para i=1,2,...,n.

Si q = 1, ya estará demostrado.

Para q > 1, como las derivadas parciales de primer orden son funciones homogéneas de grado (r-1) puede inducirse, por la demostración anterior, que las derivadas parciales de segundo orden van a ser homogéneas de orden (r-2).

Así, suponiendo que las derivadas parciales de orden $p \leq q$ son homogéneas de grado (n-p), las derivadas de orden (p+1) serán homogéneas de grado (r-(p+1))=r- p -1 por lo demostrado antes.■

8*) Reducción a una función de (n-1) variables*

Sea $f: D \subseteq R^n \to R$ una función homogénea de grado r.

Entonces se verifica que

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{x_i^{\,r}} = \varphi\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right).$$

Demostración:

Si f es homogénea de grado r, se tiene que:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Se demostraría tomando un $t = \dfrac{1}{x_i}$.

Como $t > 0$, se estaría exigiendo implícitamente que $x_i > 0$.

NOTA: Esta propiedad actúa como condición necesaria y suficiente, pero esta última condición no es operativa en la práctica.

Ejemplo 9: Aplicación de la propiedad 8ª:

Sea Q(K,L) una función de producción con rendimientos constantes a escala (homogénea de grado r=1).

Entonces, la productividad física media de los factores puede expresarse como función de una sola variable, ***la relación capital- trabajo***.(k = K/L). Por ejemplo:

$$\text{PMeL} = \frac{1}{L}Q(K,L) = Q\left(\frac{K}{L},\frac{L}{L}\right) = Q\left(\frac{K}{L},1\right) = f(k).$$

2.- Teorema de Euler. Interpretación económica

Para las funciones homogéneas que admiten derivadas parciales continuas en su dominio se puede obtener un importante resultado conocido con el nombre de Teorema de Euler.

2.1.- Teorema de Euler

Sea $f: D \subseteq R^n \rightarrow R$ una función homogénea de grado r, cuyo dominio es un cono abierto y, además, $f \in C^1(D)$.

Entonces se verifica para cada punto $x \in D$ la siguiente igualdad:

$$r\, f(x) = \nabla f(x)\, x\ ,$$

$$r\, f(x_1, x_2, \cdots, x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) x_n\ .$$

Demostración:

Si f es homogénea de grado r, se tiene que:

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^r\, f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Considerando ambos términos como funciones dependientes de t, y sabiendo que $f \in C^1(D)$, se puede obtener la derivada con respecto a t de los dos términos:

Término 1: Se trata de una función compuesta F(t) cuya derivada se obtendrá mediante la Regla de la Cadena:

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, ..., tx_n)}{\partial t} = \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_1}\frac{\partial (tx_1)}{\partial t}(t) + \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_2}\frac{\partial (tx_2)}{\partial t}(t) + ... + \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_n}\frac{\partial (tx_n)}{\partial t}(t) =$$

$$= \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_1} x_1 + \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_2} x_2 + ... + \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_n} x_n$$

Término 2º: Derivando respecto a t, queda:

$$r\, t^{r-1}\, f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Al igualar las derivadas de lo dos términos:

$$r\, t^{r-1}\, f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_1} x_1 + \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_2} x_2 + ... + \frac{\partial f(tx)}{\partial tx_n} x_n\ .$$

Esta expresión se cumple, al ser f homogénea, para cualquier $t > 0$, por lo que se seguirá cumpliendo para un valor concreto como $t=1$. Sustituyendo este valor en la expresión anterior se obtiene para cualquier $x \in D$ lo que se quería demostrar:

$$r\, f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, x_n = \nabla f(x) x$$

NOTA: Se puede demostrar que el Teorema actúa como condición necesaria y suficiente para que una función de clase 1 sea homogénea de grado r.

2.2.- Teorema de Euler y teoría de la distribución

El Teorema de Euler revela algunas propiedades interesantes de las funciones de producción homogéneas.

Dada una función de producción $Q(K,L)$ se llama *productividad marginal* de los factores trabajo y capital a los valores de las derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial L}, \frac{\partial Q}{\partial K}$, respectivamente.

Según la teoría marginalista, en régimen de competencia perfecta, el equilibrio en los mercados se alcanza cuando se retribuye a los factores de acuerdo con sus productividades marginales. La **remuneración global** de los factores trabajo y capital será entonces:

$$L \frac{\partial Q}{\partial L} + K \frac{\partial Q}{\partial K}.$$

Si la función de producción $Q(K,L)$ es homogénea de grado r, el Teorema de Euler establece que:

$$r\, Q(K,\; L) = \nabla\, Q(K,\; L) \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix},$$

$$r\, Q = K \frac{\partial Q}{\partial K} + L \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Así pues, se tiene que con esta retribución:

- Si $r = 1$, (rendimientos constantes a escala) la remuneración total de los diversos factores es igual (agota) a la producción alcanzada.

- Si $r > 1$, (rendimientos crecientes a escala) la producción no alcanza para remunerar a todos los factores ($rQ > Q$).

- Si $r < 1$, (rendimientos decrecientes a escala) la producción supera la remuneración de todos los factores, quedando parte del producto sin distribuir ($rQ < Q$).

Problemas resueltos[1]

1.- Estudie la homogeneidad de la siguiente función y halle su grado.

$$f(x,y,z)=\frac{x^2y^2}{z}+z^3\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{y}\right)$$

Solución:

f(x,y,z) será homogénea de grado r si verifica:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^r f(x, y, z)$$
$$\forall(x,y,z) \in D_f$$
$$\lambda > 0 \,/\, \lambda(x, y, z) \in D_f$$
$$r \in R$$

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\frac{(\lambda x)^2(\lambda y)^2}{\lambda z}+(\lambda z)^3\operatorname{sen}\left(\frac{3\lambda x}{\lambda y}\right)=\frac{\lambda^2x^2\lambda^2y^2}{\lambda z}+\lambda^3z^3\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{y}\right)=$$
$$=\frac{\lambda^3x^2y^2}{z}+\lambda^3z^3\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{y}\right)=\lambda^3\ f(x,\ y,\ z)$$

Por tanto, f es homogénea de grado 3 (exponente de λ).

2.- Estudie la homogeneidad de la siguiente función y halle su grado.

$$f(x,y,z)=\frac{z\,y^5}{x}+x^5\ln\left(\frac{3z}{y}\right).$$

Solución:

f(x,y,z) será homogénea de grado r si verifica:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^r f(x, y, z)$$
$$\forall(x,y,z) \in D_f$$
$$\lambda > 0 \,/\, \lambda(x, y, z) \in D_f$$
$$r \in R$$

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\frac{(\lambda z)(\lambda y)^5}{\lambda x}+(\lambda x)^5\ln\left(\frac{3\lambda z}{\lambda y}\right)=\frac{\lambda z\lambda^5y^5}{\lambda x}+\lambda^5x^5\ln\left(\frac{3z}{y}\right)=$$
$$=\lambda^5\frac{zy^5}{x}+\lambda^5x^5\ln\left(\frac{3z}{y}\right)=\lambda^5\ f(x,y,z).$$

Por tanto, f es homogénea de grado 5 (exponente de λ).

[1] En los ejercicios resueltos se ha empleado una notación diferente a las páginas anteriores: se emplea el parámetro λ en lugar de t.

3.- Estudie la homogeneidad de las siguientes funciones y halle su grado. Estudie la homogeneidad y grado de la función suma (f+g)(x,y,z).

$$f(x,y,z)=\frac{x\,y^2}{z}$$

$$g(x,y,z)=z^2\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{y}\right)$$

f(x,y,z) será homogénea de grado r si verifica:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^r f(x, y, z)$$
$$\forall (x,y,z) \in D_f$$
$$\lambda > 0 \,/\, \lambda(x, y, z) \in D_f$$
$$r \in R$$

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\frac{(\lambda x)(\lambda y)^2}{\lambda z}=\frac{\lambda x\lambda^2 y^2}{\lambda z}=\lambda^2\,\frac{xy^2}{z}=\lambda^2\; f(x,y,z)\,.$$

Por tanto, f es homogénea de grado 2.

g(x,y,z) será homogénea de grado r si verifica:

$$g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^r g(x, y, z)$$
$$\forall (x,y,z) \in D_g$$
$$\lambda > 0 \,/\, \lambda(x, y, z) \in D_g$$
$$r \in R$$

$$g(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=(\lambda z)^2\operatorname{sen}\left(\frac{3(\lambda x)}{(\lambda y)}\right)=\lambda^2 z^2\operatorname{sen}\left(\frac{3x\lambda}{y\lambda}\right)=\lambda^2 z^2\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{y}\right)=\lambda^2 g(x,y,z).$$

Por tanto, g es homogénea de grado 2.

La función suma es (f+g)(x,y,z)= f(x,y,z)+g(x,y,z), será homogénea de grado r si verifica:

$$(f+g)(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^r (f+g)(x, y, z)$$
$$\forall (x,y,z) \in D_{f+g}$$
$$\lambda > 0 \,/\, \lambda(x, y, z) \in D_{f+g}$$
$$r \in R$$

Por ser f y g homogéneas del mismo grado, resultará que su suma también será homogénea y del mismo grado, 2. Se justifica así:

$$(f+g)(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)+ g(\lambda x, \lambda y, \lambda z)= \lambda^2 f(x,y,z)+ \lambda^2 g(x,y,z)=$$
$$= \lambda^2 (f(x,y,z)+g(x,y,z)) = \lambda^2 f+g(x,y,z)$$

4.- Estudie la homogeneidad de las siguientes funciones y halle su grado. Estudie la homogeneidad y grado de la función suma (f+g)(x,y,z).

$$f(x,y,z)=\frac{x\,y}{z},$$

$$g(x,y,z)=z^{30}\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

f(x,y,z) será homogénea de grado r si verifica:

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^r f(x,y,z)$$
$$\forall(x,y,z)\in D_f$$
$$\lambda>0\ /\ \lambda(x,y,z)\in D_f$$
$$r\in R$$

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\frac{(\lambda x)(\lambda y)}{\lambda z}=\frac{\lambda xy}{z}=\lambda\frac{xy}{z}=\lambda\, f(x,y,z).$$

Por tanto, f es homogénea de grado 1.

g(x,y,z) será homogénea de grado r si verifica:

$$g(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^r g(x,y,z)$$
$$\forall(x,y,z)\in D_g$$
$$\lambda>0\ /\ \lambda(x,y,z)\in D_g$$
$$r\in R$$

$$g(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=(\lambda z)^{30}\cos\left(\frac{(\lambda x)}{(\lambda y)}\right)=\lambda^{30}z^{30}\cos\left(\frac{x\lambda}{y\lambda}\right)=\lambda^{30}z^{30}\cos\left(\frac{x}{y}\right)=\lambda^{30}g(x,y,z)$$

Por tanto, g es homogénea de grado 30.

La función suma es (f+g)(x,y,z)= f(x,y,z)+g(x,y,z), será homogénea de grado r si verifica:

$$(f+g)(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^r (f+g)(x,y,z)$$
$$\forall(x,y,z)\in D_{f+g}$$
$$\lambda>0\ /\ \lambda(x,y,z)\in D_{f+g}$$
$$r\in R$$

Por ser f y g homogéneas pero de distinto grado, resultará que su suma no será homogénea. Se justifica así:

$$(f+g)(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)+g(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda\, f(x,y,z)+\lambda^{30}\, g(x,y,z)=$$
$$=\lambda\,(f(x,y,z)+\lambda^{29}\, g(x,y,z))\neq\lambda^r\, f+g(x,y,z)$$

No es homogénea.

Problemas propuestos

1.- Demuestre que si f(x,y) es una función homogénea de grado r con derivadas parciales de segundo orden continuas se cumple:

$$x^2\, f_{11}(x,y) + 2\, x\, y\, f_{12}(x,y) + y^2\, f_{22}(x,y) = r\,(r-1)\, f(x,y)$$

AYUDA: Según la propiedad 7ª, las derivadas parciales de primer orden de esta función serán homogéneas de grado (r-1), y por tanto se les podrá aplicar el Teorema de Euler.

2.- Sean f(x,y) y g(x,y) funciones homogéneas de grado r y F(u,v) una función homogénea de grado s. Pruebe que la función $(x,y) \rightarrow F[f(x,y), g(x,y)]$ es homogénea de grado $(r \cdot s)$.

AYUDA: Se probaría a partir de la propiedad 6ª (composición de funciones homogéneas).

3.- Demuestre que el Teorema de Euler es también una condición suficiente para que una función real de n variables con derivadas de primer orden continuas sea homogénea de grado r.

BORRELL FONTELLES, J.(199O):pp.223-225; COSTA REPARAZ, E.(1989):pp.56-58

4.- Pruebe que la octava propiedad (reducción a una función de (n-1) variables) actúa también como condición suficiente para que una función real de n variables sea homogénea de grado r.

BORRELL FONTELLES, J.(199O):pp.219-221; COSTA REPARAZ, E.(1989):pp.54-55

5.- Una empresa cuenta con 300 horas de empleados y 200 horas de máquina para llevar a cabo la producción. Supone que su función de producción es homogénea de grado r, y ha estimado estadísticamente que las productividades marginales de la hora de empleado y la de la hora-máquina toman el valor 3 y 4, respectivamente. Sabiendo que el nivel de producción obtenido es de 850 unidades, ¿qué grado de homogeneidad se deduce para la función de producción?

SOLUCIÓN: r = 2

6.- Un asesor de inversiones quiere modelizar mediante funciones homogéneas un índice de riesgo de una cartera compuesta por dos tipos de activos financieros, renta variable y renta fija. Las cantidades invertidas en renta variable están representadas por x, mientras y representa las cantidades invertidas en renta fija. Teniendo en cuenta que el riesgo es menor cuanto mayor sea la cantidad invertida en renta fija con relación a la invertida en renta variable, ayude a este asesor proporcionándole una expresión analítica para la función de riesgo homogénea, R(x,y), en los siguientes casos:

a) El riesgo permanece constante aunque cambien en la misma proporción las cantidades invertidas en los dos tipos de activos.

b) Cuando se multiplica las cantidades invertidas, (x,y), por una constante, el riesgo varía en la misma proporción.

c) Cuando se multiplica las cantidades invertidas, (x,y), por una constante, el riesgo varía en mayor proporción.

EJEMPLOS:

a) $R(x,y)= a + b\,\frac{x}{y}$; a,b>0 (homogénea grado 0).

b) $R(x,y)= ax - by$; a,b>0 (homogénea grado 1).

c) $R(x,y)= ax^2 - by^2$; a,b>0 (homogénea grado 2).

7.- Estudie la homogeneidad de la siguiente función. En caso afirmativo halle su grado:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z}.$$

8.- Estudie la homogeneidad de la siguiente función. En caso afirmativo halle su grado:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{2x^2y}.$$

BIBLIOGRAFÍA

Borrell Fontelles, J. (1990): *Métodos matemáticos para la Economía. Campos y autosistemas*, 4ª edición. Pirámide. Madrid, pp. 215-228.

Caballero, R.E.; et al. (1992): *Métodos matemáticos para la Economía*. McGraw-Hill, Aravaca (Madrid), pp. 303-307.

Chiang, A. C. (1987): *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. McGraw-Hill, México, pp. 210-232.

Costa Reparaz, E. (1989): *Matemáticas para economistas*. Pirámide. Madrid, pp.52-60.

Grafe , J. (1991): *Matemáticas para economistas*. McGraw-Hill. Madrid, pp. 445-450.