# Los excedentes en la Política Agraria Comunitaria: El caso del sector lácteo tratado como un problema de Control Óptimo.

Prof. D. Juan Manuel Pérez-Salamero González
Departamento de "Economia Financera i Matemàtica"
Universitat de València

## RESUMEN.

La mayoría de objetivos planteados en el Tratado de Roma en materia agrícola se han visto alcanzados, pero las medidas tomadas han originado otros graves problemas, como es el caso de los excedentes agrícolas. Este problema se analiza para el sector de la leche, por la importancia que tiene en el presupuesto agrícola comunitario.

Se adapta el problema básico de producción y almacenamiento al caso del sector lácteo comunitario. La Teoría del Control Optimo permite su modelización como un problema lineal cuadrático determinista en tiempo contínuo, es decir, como un caso de estabilización de la producción y cantidad almacenada de leche, empleando como variables de control, o instrumentales, el precio indicativo y el gasto en reforma de las estructuras agrarias. Tras un ejercicio de simulación, se observa que la estabilización del sistema, pese a ser posible, no se alcanza, generándose unos excedentes debido a la dificultad de establecer un precio indicativo compatible con esa estabilización.

Por último, se analiza el posible efecto de las medidas previstas en la reciente legislación comunitaria sobre el futuro de este sector a tenor de los resultados obtenidos con la modelización desarrollada en la comunicación.

# 1.- INTRODUCCION.

La Política Agraria Común está en pleno proceso de reforma. Según la Comisión (documento COM(91) 100 final), los problemas causados o no resueltos por la PAC que justifican la reforma, fundamentalmente, son:

- El aumento de los excedentes;
- los gastos crecientes de intervención en el mercado;
- las tensiones internacionales como consecuencia de las restituciones a las exportaciones;
- el débil crecimiento de la renta agraria, pese a la disminución del número de agricultores y al aumento de los gastos agrarios;
- una distribución de las ayudas más favorable a las grandes explotaciones, pues se han ido otorgando según capacidad productiva;
- la intensificación de los métodos de producción que ha dado origen a nuevas amenazas para la conservación del medioambiente.

Para comprender estos resultados, conviene recordar que los objetivos recogidos en el artículo 39 del Tratado de Roma para la política acrícola común estaban encaminados, principalmente, hacia la consecución de una seguridad en los abastecimientos alimentarios a unos precios razonables para los consumidores, garantizando para ello un determinado nivel de vida a los agricultores.

Estos objetivos fueron planteados en un contexto muy diferente al actual. La posguerra no estaba muy lejana, y la oferta de productos agrícolas no estaba en condiciones de satisfacer a la demanda, por lo que estaba justificada la prioridad de la seguridad en los abastecimientos.

El aumento de la productividad en el sector agrícola, y la política de sostenimiento de precios practicada han permitido alcanzar un alto grado de autoabastecimiento en muchos productos (la mayoría de los cereales, azúcar, carnes, hortalizas, vino, huevos, patatas, leche), pero una vez alcanzado este objetivo, la oferta ha seguido creciendo (2% de tasa de crecimiento anual entre 1973 y 1988), mientras que la demanda lo ha hecho a un ritmo menor (0,5% en el mismo período) dada la fuerte inelasticidad-precio de algunos productos agrícolas, o incluso una estabilidad-renta negativa para otros dados unos elevados niveles de renta.

Este desajuste ha llevado a la formación de excedentes que han tenido consecuencias negativas al elevar los gastos asumidos por el FEOGA-Garantía, y al generar tensiones comerciales debidas a las subvenciones concedidas por la CEE para colocarlos en los mercados internacionales. El objetivo de la estabilidad de los mercados, recogido también en el artículo 39, se ha conseguido artificialmente, pues se han evitado las oscilaciones (caídas) de los precios internos trasladandolas al mercado mundial.

Esta comunicación muestra como las políticas de sostenimiento de precios van a conducir, casi inevitablemente, a la generación de excedentes. Para ello se efectúa una adaptación del problema de control óptimo de producción e inventario al caso del sector lácteo, dada la importancia relativa que éste tiene en el presupuesto del FEOGA-Garantía (18'9% en el bienio 1989-90).

## 2.- EL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO CON ESTABILIZACION.[1]

La Teoría del Control Optimo, a partir de los años 60, tras el enunciado del Principio del Máximo de Pontryagin[2], se ha desarrollado superando algunas de las dificultades con las que se encontraban otras técnicas de la Optimización Dinámica.

Los elementos esenciales de un problema de control óptimo son un modelo matemático a controlar, un resultado deseado para ese modelo, un conjunto de controles admisibles y un funcional de coste o de beneficio que mida si la acción de control ha sido efectiva. En un problema de control con estabilización se intentará alcanzar un output, determinado o no, en un intervalo de tiempo, fijado o no, mediante unos controles o inputs, logrando simultáneamente la disminución de las fluctuaciones u oscilaciones de todas las variables que intervienen en los sistemas que se pretende estabilizar. Fluctuaciones, por otra parte, comunes a la mayoría de las variables económicas, tanto a nivel macroeconómico como a nivel microeconómico.

El modelo de estabilización de la producción e inventario que se va a plantear es un Problema Lineal Cuadrático determinista en su versión contínua. Lineal porque se trabaja con sistemas lineales, y cuadrático porque el funcional objetivo es una función cuadrática (suma de los cuadrados de las desviaciones de las variables respecto a sus niveles deseados). La solución que se obtiene es una regla de acción "feed-back" en la que las variables de control o instrumentales son función lineal de las variables que se quieren controlar (variables de estado).

## 3.- MODELO DE ESTABILIZACION DE PRODUCCION Y ALMACENAMIENTO.[3]

Un caso típico de control es el problema de minimizar el coste de mantener un almacenamiento y una producción de un determinado producto próximos a unos niveles deseados.

Una empresa se plantea, dada una tasa de ventas exógena s(t), positiva, buscar el nivel de producción, u(t), que minimice

$$J = \int_0^T \left[ q(x-\bar{x})^2 + r(u-\bar{u})^2 \right] dt$$

donde $x$ , y $u$ son los niveles de stocks almacenados y de producción, respectivamente, $\bar{x}$ y $\bar{u}$ los niveles deseados; y q y r los pesos constantes dados por la empresa para penalizar las desviaciones de la producción y almacenamiento de las sendas planeadas.

La acumulación de inventarios en el tiempo, $\dot{x}(t)$, es la diferencia entre la producción, u(t), y las ventas, s(t). Está reflejada en la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = u(t) - s(t)$$

Se parte de un nivel de existencias almacenado, $x(0)= x_0$, conocido, estando el tiempo inicial y el final fijados, (0,T).

Se construye el Hamiltoniano correspondiente y, teniendo en cuenta las condiciones de optimalidad, se obtiene el control óptimo:

$$u^* = \frac{p(t)}{2r} + \bar{u}$$

---

[1] Para aproximarse a la Teoría del Control Optimo pueden consultarse manuales básicos como BARNETT, Stephen (1975); BORRELL VIDAL, Máximo (1988), o TU, P.N.V. (1984), entre otros.
[2] PONTRYAGIN, (1962).
[3] Ha sido estudiado por muchos autores. Puede verse una recopilación de distintos planteamientos en SETHI (1981).

Sustituyendo en la restricción

$$\dot{x} = \frac{p}{2r} + \bar{u} - s(t), \quad \text{con } x(0) = x_0$$

Siendo

$$p(t) = k(t)\, x(t) + v(t)$$

Las ecuaciones de Ricatti resultantes son

$$\dot{k} + \frac{k^2}{2r} - 2\,q = 0$$

$$\dot{v} + \frac{k}{2r}\,v - k\,(u - s) - 2\,q\,x = 0$$

con k(T) = 0, v(T) = 0 (p(T) = 0).

Las soluciones de este sistema son

$$k(t) = -\,2\,r\,\alpha \tanh[\alpha(T - t)] \quad \text{donde } \alpha \equiv \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(t) = 2\,r\,\alpha\bar{x}\tanh\left[\alpha(T - t)\right] \quad \text{con } \bar{u} = s\,.$$

De esta forma, queda totalmente determinado el control óptimo $u^*(t)$,

$$u^*(t) = \alpha(\bar{x} - x)\tanh\left[\alpha(T - t)\right] + s(t)$$

Siendo el nivel óptimo de inventarios

$$x^*(t) = \bar{x} + \frac{\cosh\left[\alpha(T - t)\right](x_0 - \bar{x})}{\cosh(\alpha T)}$$

La tasa de producción óptima, $u^*(t)$, es un control feeedback, depende además de los parámetros del sistema y de la tasa exógena de ventas, s(t), del nivel corriente de almacenamiento, x(t).

Puede verse que la evolución temporal óptima del inventario refleja que si, inicialmente, $x_0 = \bar{x}$, es decir, el nivel inicial de stocks es el deseado, se mantendrá siempre en ese nivel. Ahora bien, si $x_0 \neq \bar{x}$, se aproximará asintóticamente al nivel deseado.

## 4.- MODELIZACION DEL CASO DEL SECTOR LACTEO.

Los instrumentos (variables de control) con los que ha ido contando la organización del mercado de productos lácteos, principalmente, han sido:

- La existencia de un precio indicativo para la leche con un determinado contenido de grasa.
- Un precio umbral para una serie de productos representativos, y que se van a considerar como precios mínimos para las importaciones realizadas por terceros países.
- Cuotas a la producción con una tasa suplementaria aplicable al exceso de la producción sobre esta cuota.

- Tasa de corresponsabilidad.
- Ayudas de carácter estructural concedidas en el marco de la política de mejora de las estructuras agrarias (ayudas al abandono de la actividad, modernización de explotaciones, ...).
- Compras de garantía para la leche desnatada en polvo y mantequilla, primero permanentes y sin límite, más tarde con restricciones temporales y cuantitativas.

A pesar de la aplicación del régimen de cuotas a la producción para poder ajustar-equilibrar el mercado de productos lácteos por el lado de la oferta, la producción lechera actualmente sigue en unos niveles muy superiores a su demanda. Si bien las existencias excedentarias de mantequilla y leche en polvo se lograron disminuir en un período, posteriormente han vuelto a crecer[4].

El sistema dinámico representará las relaciones entre estas variables instrumentales (variables de control) y las que se pretende controlar (variables de estado): producción y cantidad almacenada. La formulación se hará en tiempo contínuo, como ecuaciones lineales y deterministas en su forma state-space. Esta no es la representación más fiel de la situación; de hecho, con un modelo en tiempo discreto, estocástico y no lineal, se hubiera podido conseguir una representación más aproximada. No todas las posibles variables instrumentales van a incorporarse explícitamente, aunque sí podrían estar recogidos sus efectos en los coeficientes del modelo. Se planteará el problema tomando como variables de control el precio indicativo y el gasto en la política de reforma de las estructuras agrarias. Los coeficientes de las ecuaciones planteadas son variables en el tiempo, obteniéndose mediante una aproximación numérica la solución del sistema de ecuaciones de RICATTI. En la construcción del funcional objetivo (cuadrático) los pesos que penalizan las desviaciones serán marcados por los agentes decisores, siendo también funciones del tiempo.[5]

El problema se refleja, pues, de la siguiente manera:

$$\text{Min } J = \frac{1}{2}(x-\hat{x})'S(x-\hat{x}) + \int_{t_0}^{T}\left[(x-\hat{x})'Q(x-\hat{x}) + (x-\hat{x})'M(x-\hat{x})\right]dt$$

s. a

$$\dot{x} = Ax + Bu + C$$

donde :

a) El vector de variables de estado es :

$$x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \text{ siendo}$$

$x_1(t)$ , la cantidad almacenada en cada instante t por los organismos de intervención públicos de leche, es decir, de leche desnatada y mantequilla en unidades de medida equivalentes de leche.

$x_2(t)$, cantidad producida de leche en cada instante t.

b) Vector de valores deseados para las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$

---

[4] Según COMISION-COMUNIDADES EUROPEAS (1992), las actuales existencias de mantequilla y leche en polvo superan las 900.000 toneladas.

[5] Una modelización alternativa de la política lechera comunitaria puede encontrarse en OSKAM, Arie (1991).

$$\hat{x} = \hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d(t) \end{pmatrix}$$

donde $d(t)$ es la demanda interior en cada instante $t$.

c) Matriz residual. Da lugar al valor del funcional objetivo en el instante final $t = T$.

$$S(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Matriz diagonal de penalizaciones de las desviaciones de las variables de estado respecto de sus niveles deseados.

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & 0 \\ 0 & q_2(t) \end{pmatrix} \text{ con } q_1(t),\ q_2(t) > 0.$$

e) $t_0$, es el tiempo inicial,($t_0 = 0$).

f) T, es el tiempo final,($T = 15$).

g) las condiciones frontera para el instante inicial , $t_0=0$, son

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

h) Las variables de control

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

donde

$u_1(t)$, es el precio indicativo de la leche, (política de sostenimiento de precios).

$u_2(t)$, es el gasto en reforma de las estructuras agrarias, (política de estructuras).

i) Objetivos para las variables de control

$$\hat{u}(t) = \begin{pmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\dot{d}(t) - \alpha_3(t) - d(t)}{\beta_2(t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

j) Matriz de penalizaciones de las desviaciones de las variables de control respecto de sus niveles deseados. Es definida positiva y diagonal para todo $t \in [0,T]$.

$$M(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) & 0 \\ 0 & m_2(t) \end{pmatrix} \text{ siendo } m_1(t) > 0,\ m_2(t) > 0, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

k) Matrices de parámetros

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ 0 & \alpha_3(t) \end{pmatrix};\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(t) \\ \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{pmatrix};\ C(t) = \begin{pmatrix} -\alpha_2(t)d(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\alpha_1(t),\ \beta_1(t),\ \alpha_3(t),\ \beta_3(t) < 0;\ \alpha_2(t),\ \beta_2(t) > 0,\ \forall t \in [0,T].$$

La elección del signo de cada parámetro $\alpha_i$, $\beta_j$, se hace en base a ciertas consideraciones que a continuación se desarrollan para cada uno de ellos.

- $\alpha_1 < 0$. La cantidad almacenada por los órganos de intervención públicos, siempre que exista alguna, ($x_1 > 0$), va a influir negativamente en el aumento de dicho stock.

- $\alpha_2 > 0$. La cantidad almacenada varía en la misma dirección que el exceso de producción u oferta interna (producción - demanda, $x_2(t) - d(t)$ ).

- $\alpha_3 < 0$. El nivel instantáneo de producción influye automáticamente, y de forma negativa en el aumento de la cantidad producida. La tasa suplementaria y la tasa de corresponsabilidad tienen un efecto negativo sobre la cantidad producida de leche que recoge el parámetro $\alpha_3$, superándose los posible efectos positivos que pudiera tener la inercia productiva en el incremento de la producción.

- $\beta_1 < 0$. Los recursos destinados al gasto en reforma de las estructuras agrarias tienden a hacer disminuir la cantidad almacenada.

- $\beta_2 > 0$. El precio indicativo influye positivamente en el aumento de la cantidad producida.

- $\beta_3 < 0$. El gasto en reforma de las estructuras agrarias afecta negativamente al aumento de la producción, entendiendose que las reformas perseguidas tienden al abandono de las actividades productivas generadoras de excedentes, en beneficio de otras en las que la C.E.E. todavía es deficitaria.

El ejercicio de simulación ha pasado por definir los parámetros como funciones del tiempo, de tal forma que el modelo es estabilizable y controlable (los estados deseados son alcanzables)[6]. La solución pasará por resolver el sistema de ecuaciones de RICATTI será

$$\dot{K} = K = -KA - A'K - Q + KBM^{-1}B'K$$

$$\dot{V} = -(A' - KBM^{-1}B')V + Q\hat{x} - KC - KB\hat{u}$$

siendo $K(T) = S$, y $V(T) = -S\ \hat{x}(T)$.

Como las matrices A, B, C, Q, y M son variables, se puede obtener una aproximación numérica de las soluciones de K y de V resolviendo hacia atrás en el tiempo, con $\Delta t$ negativos.

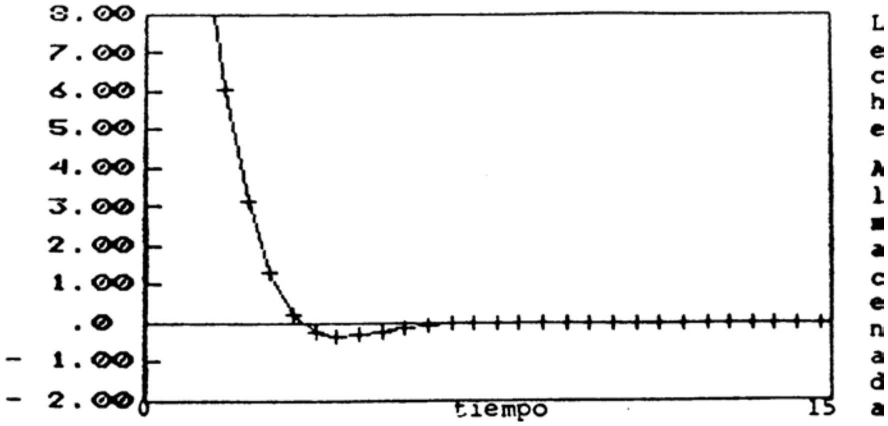
Una vez obtenidas las aproximaciones a las soluciones de $K^*(t)$ y $V^*(t)$, se consigue conocer las leyes de control óptimo, $u^*(t)$, que seguirán siendo aproximaciones, tanto más cercanas a la solución, como pequeños sean los $\Delta t$. Sustituyendo las leyes de C.O. feedback en el sistema dinámico, obtendremos la evolución óptima aproximada de las variables de estado, $x^*(t)$.

Las figuras I y II representan, respectivamente, la solución para la senda temporal óptima de la cantidad almacenada de leche, $x_1^*(t)$, y la de las desviaciones de la producción respecto a la demanda de leche, $x_2^*(t)$. Puede apreciarse claramente como los objetivos perseguidos se alcanzan en el instante final marcado por T, pero este hecho ya se conocía por haber escogido objetivos para las variables de control consistentes con los fijados para las variables de estado.

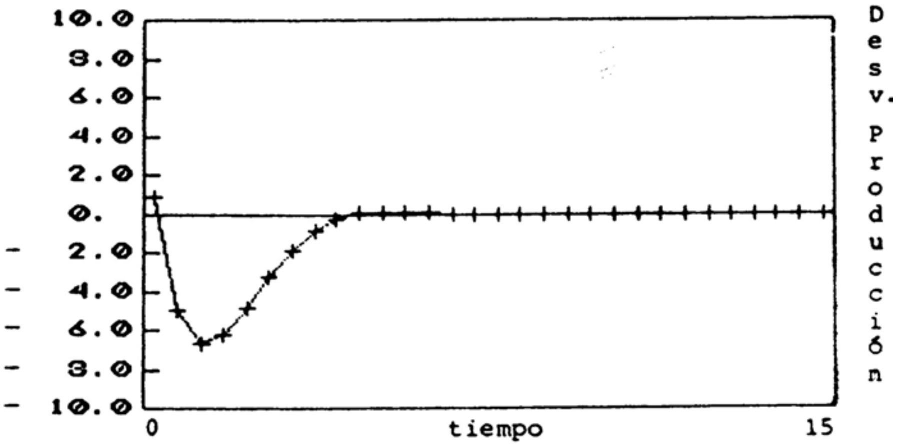
---

[6] La controlabilidad de un sistema dinámico hace referencia a la existencia de un control u(t) que sea capaz de conducir un sistema dinámico desde un estado inicial dado, $x_0$, en el tiempo $t = t_0$, a un estado final, $x_T$, dado en $t = T$.
n sistema es estabilizable si existe una ley de control que transforma a este sistema en un sistema estable.

F I G U R A I

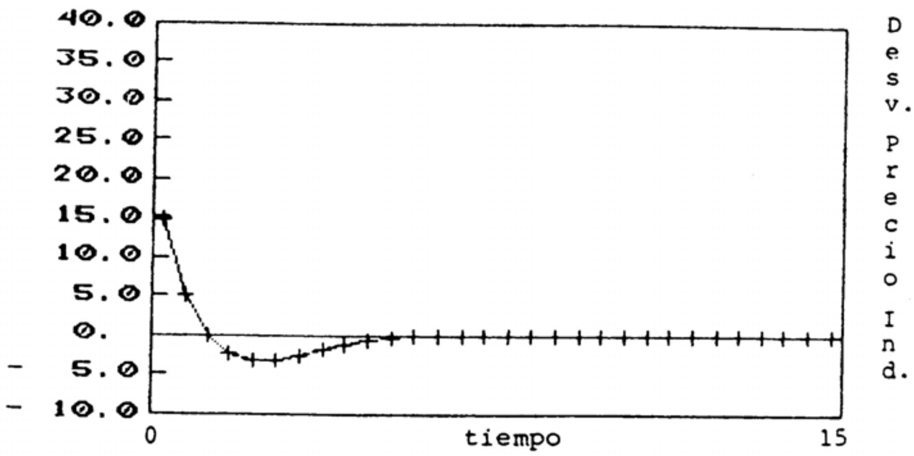



F I G U R A II

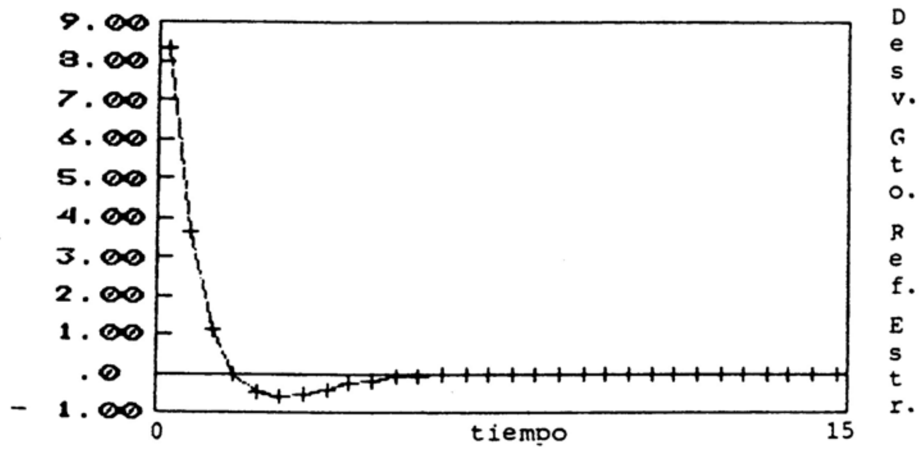



Las variables de control también alcanzan sus valores deseados; las figuras III y IV recogen este hecho para las desviaciones del precio indicativo, $u_1(t)$, y para el gasto en reforma de las estructuras, $u_2(t)$.

F I G U R A III



F I G U R A IV




Ahora bien, si el vector $\hat{u}(t)$ fuera distinto del planteado, no se alcanzarían los valores deseados para las variables de estado. Estableciendo un precio indicativo de la leche superior al expuesto, $\hat{u}_1'(t) = \hat{u}_1(t) + 25$, con fines de mantener la renta de los agricultores a unos niveles políticamente deseables, se podría lograr lo contrario, al rebasarse en $T$ el nivel de producción acorde con la demanda, y las cantidades almacenadas no disminuir lo suficiente como para poder afirmar que la renta de los agricultores fuera a ser la perseguida en un principio.

La política de sostenimiento de precios, pues, al establecer precios indicativos superiores a los consistentes con una producción igual a la demanda, estaría facilitando la aparición de excedentes.

Las figuras V y VI reflejan la evolución de $x_1(t)$, y de las desviaciones de $x_2(t)$ respecto de la demanda para el nuevo valor de $\hat{u}_1(t)$.

F I G U R A V

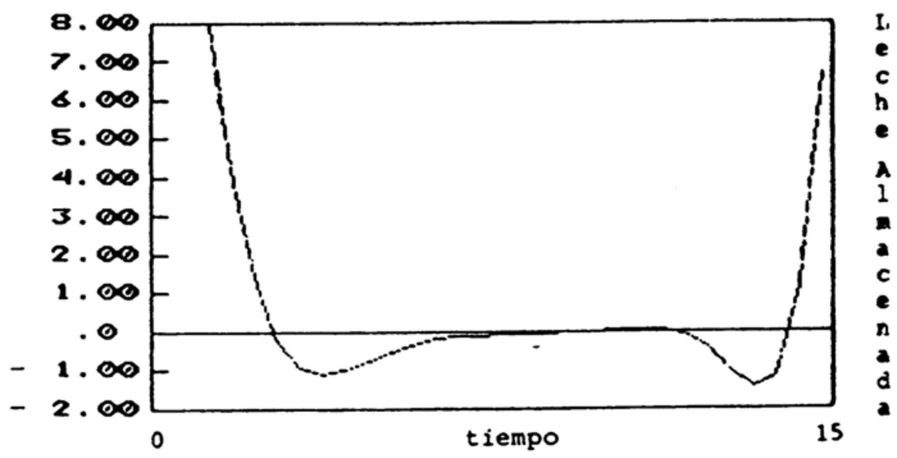
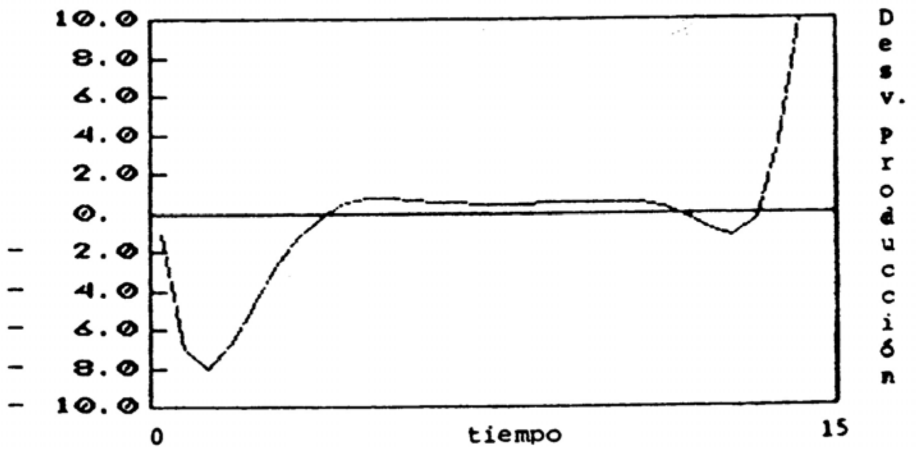


FIGURA VI




Si bien el modelo planteado presenta unas propiedades muy especiales y envidiables, que no es lógico suponer vayan a cumplir los verdaderos sistemas dinámicos, puede concluirse, que la consecución de los objetivos va a ser posible en unos casos muy reducidos, en los que además de ser estabilizable el modelo, las variables de control se plantean de forma que esos objetivos se alcancen en el horizonte temporal fijado.

## 5.- CONSIDERACIONES FINALES.

Las propuestas de reforma que se plantean para el sector lácteo se fundamentan en una reducción de las cuotas lecheras (4%, del que el 1% podrá redistribuirse nacionalmente), así como de los precios institucionales (10% de media con un 5% en el de la leche en polvo y un 15% en el caso de la mantequilla). También se establece un régimen nacional de abandono de la producción cofinanciado por la C.E., y ayudas (primas) con el fin de fomentar las explotaciones extensivas, suprimiéndose la tasa de corresponsabilidad.

A la vista de estas propuestas, y en espera de cómo se implementen en última instancia los programas de ayudas de tipo estructural, las medidas tradicionales de precios y mercados siguen teniendo un papel fundamental a la hora de intentar controlar la producción. Estas políticas no se han mostrado en los años precedentes tan eficaces como se pretendía. De todas formas, aunque la reducción de los precios institucionales resulte ser insuficiente, los precios garantizados estarán más próximos a los que proporcionaría un mercado en libre competencia, por lo que los inevitables excedentes generados serán menores.

La política de sostenimiento de precios se ha mostrado eficaz en aumentar la producción y garantizar el autoabastecimiento, pero si este objetivo, ya conseguido, deja de ser prioritario, cabe cuestionarse una liberalización del mercado. No serviría el argumento de mantener a las pequeñas explotaciones familiares ineficaces para no llevarla a cabo, pues los sistemas de protección a la agricultura comunitaria no han tenido éxito ni en la elevación relativa del nivel de vida de los agricultores con respecto al de otros sectores productivos, ni en evitar la disminución progresiva del número de explotaciones familiares que con la reforma se quieren conservar.

**REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.**


BARNETT, Stephen (1975). - Introduction to Mathematical Control Theory. Oxford Applied Mathematics and computing Science Series, 2, Oxford.

BORRELL VIDAL, Máximo (1988). - Teoría del control óptimo. Hispano Europea S.A., Barcelona.

COMISION- COMUNIDADES EUROPEAS (1992).- Evolución y futuro de la política agraria común. Suplemento 5/91 del Boletín de las CE. Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas. Luxemburgo.

OSKAN, Arie (1991).- Messuring the rationality of a policy, applied to EC dairy policy in the eighties. Seminario "La Ronda Uruguay del GATT. La dimensión internacional". Publicación UIMP-Valencia.

PONTRYAGIN, I.S. y otros (1962). - The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience, New York.

SETHI, Suresh ; THOMPSON, Gerald (1981). - Optimal Control Theory. Applications to Management Science. International Series in Management Science/ Opertations Research. Martinus Nijhoff Publishing.

TU, P.N.V., (1984). - Introductory optimization dynamics. Optimal Control with economics and management science applications. Springer-Verlag.

**Tabla de valores funcionales de los parametros del problema empleados en el ejercicio de simulacion de las figuras I, II, III, IV, V, VI**

- Valor deseado para la producción (demanda):

$$d(t) = 100 + 20\, e^{-0.3t}$$

- Matriz Q de penalizaciones de las desviaciones de la cantidad almacenada y producida de los niveles deseados:

$$q_1(t) = 10 + 10\, t^2 > 0;\ q_2(t) = 2 > 0$$

- Valores iniciales para variables estado (cantidad almacenada y produccion):

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 135 \end{bmatrix}$$

- Coeficientes sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\alpha_1(t) = -\,0.4+(0.1\ t/T) < 0, \qquad ß_1(t) = -(0.4+0.4t)/T \quad < 0$$

$$\alpha_2(t) = (4/6)+(t/6T) > 0, \qquad ß_2(t) = 0.3+0.6\, e^{-0.003t} > 0$$

$$\alpha_3(t) = -\,0.1 < 0, \qquad ß_3(t) = -((1/7)+(t/8T)) \ < 0$$

$$\forall t \in [0,T]$$

- Matriz M de penalizaciones de las desviaciones de las variables de control (instrumentales) respecto a sus valores deseados:

$$m_1(t) = 10 + 10\ t\ > 0;\ m_2(t) = 5 + 5\ t_2 > 0;\ \forall t \in [0,T]$$