GEOMETRÍA RIEMANNIANA

Escuela avanzada: Conjetura de Poincaré
Flujo de Ricci y aplicaciones

Magdalena Rodríguez

Granada, 28 de junio de 2007

Notación

M es una variedad diferenciable de dimensión n si es conexa, Hausdorff, ANII y $\exists\ \mathcal{F} = \{\psi_i : U_i \subset_{abto} M \to \psi_i(U_i) \subset_{abto} \mathbb{R}^n\ homeomf\}$ con:

- $\cup_i U_i = M$;
- $\psi_i \circ \psi_j^{-1}\ \mathcal{C}^\infty$, $\forall i, j$;
- $\mathcal{F}$ maximal.

$\mathcal{C}^\infty(M) = \{f : M \stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\to} \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{C}^\infty(M, N) = \{f : M \stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\to} N\}$

$T_pM = \{\alpha'(0) \mid \alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\to} M, \alpha(0) = p\} \cong \mathbb{R}^n$

$TM = \cup_{p\in M} T_pM \equiv \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}\}$

$\mathfrak{X}(M) = \{X : M \stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\to} TM \mid X_p \in T_pM,\ \forall p \in M\}$

$X \in \mathfrak{X}(M)$ es $\mathcal{C}^\infty \iff X(f) \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

Corchete de Lie

$$\begin{array}{rcl} [\ ,\ ]: \ \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & [X,Y], \ \ [X,Y]_p = X_p(Y) - Y_p(X) \end{array}$$

¿Cómo deriva?

$$\begin{array}{rcl} [X,Y]: \ \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ f & \longmapsto & [X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \end{array}$$

Propiedades del corchete de Lie:

1. Es antisimétrico: $[X,Y] = -[Y,X]$.
2. Es bilineal: $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$.
3. Identidad de Jacobi: $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

Corchete de Lie

Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$.

$\exists! \gamma_p :]a_p, b_p[\overset{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} M$ cumpliendo: $\begin{cases} \gamma_p'(t) = X_{\gamma_p(t)}. \\ \gamma_p(0) = p. \end{cases}$

Fijado $p \in M$, existen $\delta > 0$ y $U \subset_{\text{abto}} M$, $p \in U$, tales que

$$\varphi :]-\delta, \delta[\times U \longrightarrow M \; , \; \varphi(t, q) = \gamma_q(t) \; , \text{ es } \mathcal{C}^\infty.$$

$\varphi_t : U \longrightarrow M$, $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$, se llama flujo local de X en p.

Se puede ver $[X, Y]$ como una derivada de Y en la dirección de X:

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}) - Y_p \right]$$

Derivada de Lie

$$L_X : \mathcal{T}_{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)\,, \quad L_X f = X(f).$$

$$L_X : \mathcal{T}_{1,0}(M) = \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{1,0}(M) = \mathfrak{X}(M)\,, \quad L_X Y = [X, Y].$$

$$L_X : \mathcal{T}_{r,0}(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{r,0}(M)\,, \quad L_X T = ?$$

Dado $T : \mathfrak{X}(M) \times \overset{(r)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ multilineal, definimos:

$$(L_X T)(X_1, \ldots, X_r) = X(T(X_1, \ldots, X_r))$$

$$-\sum_i T(X_1, \ldots, X_{i-1}, L_X X_i, X_{i+1}, \ldots, X_r)$$

Métrica Riemanniana

Se define una métrica Riemanniana en M como una aplicación bilineal

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^{\infty}(M)$$

simétrica : $\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$;
y definida positiva :

$$\langle X, X\rangle \geq 0, \quad y \quad \langle X, X\rangle(p) = 0 \Leftrightarrow X_p = 0.$$

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$, $(N, \langle\ ,\ \rangle')$ variedades Riemanninanas.

$\phi : M \longrightarrow N$ se dice que es una isometría si es un difeomorfismo que cumple:

$$\langle d\phi_p(X_p), d\phi_p(Y_p)\rangle' = \langle X_p, Y_p\rangle,\ \forall p \in M,\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Longitud y volumen

Se define la norma de $X \in \mathfrak{X}(M)$ como $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$,

y la longitud de una curva $\alpha :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Sea $\Omega \subset M$, $\overline{\Omega}$ compacto.

Supongamos que $\Omega \subset U$, $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta. Entonces definimos

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int_{\psi(U)} (f\sqrt{G}) \circ \psi^{-1} dx_1 \ldots dx_n,$$

siendo $G = \det(\langle X_i, X_j \rangle)_{i,j}$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Conexión de Levi-Civita

Se define la conexión de Levi-Civita de $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ como una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

que cumple:

1. Es lineal en X: $\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$.
2. Es una "derivada" en Y:
   $\nabla_X(fY_1 + gY_2) = X(f)Y_1 + f\nabla_X Y_1 + X(g)Y_2 + g\nabla_X Y_2$.
3. Es simétrica (libre de torsión): $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
4. Es compatible con la métrica: $X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

Fórmula de Koszul: $2\langle \nabla_X, Y, Z\rangle =$

$X(\langle Y, Z\rangle) + Y(\langle Z, X\rangle) - Z(\langle X, Y\rangle) + \langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle$

Símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k: $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$,

$$\nabla_{X_i} X_j = \textstyle\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k\,, \quad \text{con} \quad \Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Derivada covariante

$\nabla_X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)\,, \quad \nabla_X f = X(f)$.

$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)\,, \quad Y \mapsto \nabla_X Y$.

$\nabla_X : \mathcal{T}_{r,0}(M) \to \mathcal{T}_{r,0}(M)\,, \quad \nabla_X T$ viene dado por:

$$(\nabla_X T)(X_1, \dots, X_r) = X(T(X_1, \dots, X_r))$$
$$-\sum_i T(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_r)$$

Relación con la derivada de Lie: Definimos la derivación $A_X = \nabla_X - L_X$:

$A_X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)\,, \quad A_X f = 0$.

$A_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)\,, \quad A_X Y = \nabla_Y X$.

$A_X : \mathcal{T}_{r,0}(M) \to \mathcal{T}_{r,0}(M)$, $A_X T$ viene dado por:

$(A_X T)(X_1, \dots, X_r) = -\sum_i T(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_{X_i} X, X_{i+1}, \dots, X_r)$.

Curvatura de Riemann

Definimos la curvatura de $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) & \mapsto & R(X, Y)Z, \end{array}$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Propiedades:

1. Es lineal en sus 3 variables (es un tensor (3,1)).
2. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.
3. Identidad de Bianchi: $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$.

Expresión local:

$(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l$,

$$R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^s_{ij} \Gamma^l_{js} - \sum_s \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} + X_j(\Gamma^l_{ik}) - X_i(\Gamma^s_{jk})$$

Tensor curvatura (4,0)

Definimos el tensor curvatura (4,0) como:

$$\begin{aligned} R:\ \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) &\ \longrightarrow\ \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y,Z,W) &\ \longmapsto\ R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle \end{aligned}$$

Propiedades:

1. Es lineal en sus 4 variables (es un tensor (4,0)).
2. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$.
3. Id. de Bianchi: $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,XW) + R(Z,X,Y,W) = 0$.
4. $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$.

Expresión local:

$$R_{ijkl} = \langle R(X_i,X_j)X_k, X_l\rangle \rightsquigarrow \begin{cases} R_{ijkl} = -R_{jikl} \\ R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \\ R_{ijkl} = -R_{ijlk} \\ R_{ijkl} = R_{klij} \end{cases}$$

Curvatura seccional

$p \in M$, Π plano en T_pM generado por $\{v_1, v_2\}$.
Definimos la curvatura seccional de Π como:

$$K(\Pi) = \frac{R_p(v_1, v_2, v_2, v_1)}{\|v_1 \wedge v_2\|^2} = \frac{R_p(v_1, v_2, v_2, v_1)}{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}$$

Teorema Egregium de Gauss: La curvatura seccional se conserva por isometrías (locales); i.e. si $\phi : (M, \langle\ ,\ \rangle) \to (M', \langle\ ,\ \rangle')$ es una isometría (local), entonces $K(\Pi) = K'(d\phi_p(\Pi))$.

Se dice que M tiene curvatura seccional constante si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$K(\Pi) = k\,, \ \forall \Pi \ \text{ plano en } T_pM\,, \ \forall p \in M.$$

Ejemplos: $\mathbb{R}^n$ ($k = 0$), $\mathbb{S}^n$ ($k = 1$), $\mathbb{H}^n$ ($k = -1$).

$$M \text{ c.s.c. } k \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R(X,Y)Z = k\Big(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\Big) \\ \\ R(X,Y,Z,W) = k\Big(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle\Big) \end{array} \right.$$

Curvatura de Ricci

Tensor de curvatura de Ricci $\begin{array}{rccc} S: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & S(X,Y)\,, \end{array}$

$$S(X,Y)(p) = \mathrm{traza}\Big(v \in T_pM \mapsto R_p(v,X_p)Y_p \in T_pM\Big)$$

Propiedades:

1. Es lineal en sus 2 variables (es un tensor (2,0)).
2. Es simétrica: $S(X,Y) = S(Y,X)$.

Expresión local:

$p \in U \subset_{abto} M$, $\{E_1,\ldots,E_n\}$ base ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$, entonces:

$$S(X,Y)|_U = \sum_i R(E_i,X,Y,E_i).$$

La curvatura de Ricci es la forma cuadrática asociada a S:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ric}: & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & X & \longmapsto & \mathrm{Ric}(X) = S(X,X) \end{array}$$

Curvatura de Ricci

Expresión local: Tomamos $E_1 = \frac{1}{\|X\|}X$, y nos queda:

$$\mathrm{Ric}(X) = \|X\|^2 \sum_{i=2}^{n} K(X \wedge E_i)$$

En $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Ric} = 0$; en $\mathbb{S}^n$, $\mathrm{Ric}(X) = (n-1)\|X\|^2$

y en $\mathbb{H}^n$, $\mathrm{Ric}(X) = -(n-1)\|X\|^2$.

Finalmente, definimos la curvatura escalar de M como $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\rho(p) = \sum_i Ric_p(e_i),$$

siendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de T_pM.

Derivada covariante

$\alpha :]a, b[\stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} M$, $X :]a, b[\stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} TM$.

$$X \in \mathfrak{X}(\alpha) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} X(t) \in T_{\alpha(t)}M, \ \forall t.$$

$\exists \widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\widetilde{X}_{\alpha(t)} = X(t)$, $\forall t$.

Definimos la derivada covariante de X respecto de ∇ como

$$\frac{DX}{dt}(t_0) = \nabla_{\alpha'(t_0)}\widetilde{X} \in T_{\alpha(t_0)}M.$$

Propiedades:

1. $\frac{D(X+Y)}{dt} = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$.
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(]a, b[)$, $\frac{D(f\,X)}{dt} = f'X + f\frac{DX}{dt}$.

Expresión local:

$(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta, $X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $Y|_U = \sum_k y_k X_k$.

$$\frac{DY}{dt} = \sum_k \left(\frac{dy_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \, y_j \, \frac{dx_i}{dt} \right) X_k$$

Geodésicas

$\gamma :]a,b[\stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} M$ se dice geodésica si $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$.

Ecuación en coordenadas locales: $\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$.

$$\forall p \in M,\ \forall v \in T_p,\ \exists 0 \in I_{(p,v)} \subset_{abto} \mathbb{R}$$

y $\exists \gamma(\ ,p,v) : I_{(p,v)} \stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} M$ cumpliendo:

1. $\gamma(\ ,p,v)$ es la única geodésica con $\gamma(0,p,v) = p$ y $\gamma'(0,p,v) = v$.
2. $\gamma(t,p,\lambda v) = \gamma(\lambda t, p, v)$, $\forall t \in I_{(p,\lambda v)} = \frac{1}{\lambda} I_{(p,v)}$ (lema de homogeneidad de las geodésicas).
3. $\forall t \in \mathbb{R},\ D_t = \{(p,v) \in TM \mid t \in I_{(p,v)}\}$ es abto en TM, y $(p,v) \in D_t \mapsto \gamma(t,p,v) \in M$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Aplicación exponencial

$$\begin{array}{rccl} \text{exp}: & D_1 & \stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} & M \\ & (p,v) & \mapsto & \text{exp}_p(v) = \gamma(1,p,v) \end{array}$$

$A(p) = D_1 \cap T_pM \subset_{abto} T_pM$ es estrellado respecto de $0 \in T_pM$, y existen entornos abtos $0 \in V \subset T_pM$ y $p \in U \subset M$ tales que

$$\begin{array}{rccl} \text{exp}_p: & V & \stackrel{\text{difeomf}}{\longrightarrow} & U \\ & v & \mapsto & \text{exp}_p(v) = \gamma(1,p,v) \end{array}$$

$U =$ entorno normal de $p \;\Rightarrow\; (U, \psi = \text{``}\text{exp}_p^{-1}\text{''} = (x_1, \ldots, x_n))$ carta

$$\downarrow$$

coordenadas geodésicas normales

Denotamos $g = (g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle)_{i,j}$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}\,, \quad X_k(g_{ij}) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0\,, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0\,.$$

Desarrollo de Taylor de la métrica

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p)(x_k - x_k(p)) + \frac{1}{2}\sum_{k,l} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}(p)(x_k - x_k(p))(x_l - x_l(p)) + \ldots$$

$$= \delta_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{k,l} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}(p)(x_k - x_k(p))(x_l - x_l(p)) + \ldots$$

De donde:

$$g = I_n + \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l}(p) \right) (x_k - x_k(p))(x_l - x_l(p)) + \ldots$$

¿Cómo se traduce en la forma de volumen?

$$dv = \left(1 - \frac{1}{6} \sum_{k,l} S(X_k, X_l) x_k x_l + \ldots \right) dv_{\mathsf{eucl}}$$

Distancia

Bolas geodésicas: $B(p,R) = \exp_p(\mathbb{B}(0,R)) \subset U =$ entorno normal en p.

Esferas geodésicas: $S(p,r) = \partial B(p,r),\ r \leq R$.
Coordenadas geodésicas polares: $\forall q \in U$, $q = \exp_p(r\,v_1)$, con $v_1 \in \mathbb{S}(0,1)$.

$$q = \exp_p(r\,v_1) = \gamma(r,p,v_1), \quad \alpha(r) = \exp_p(r\,v_1) \text{ geodésica radial.}$$

$$\text{dist}(p,q) = \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \text{ es una curva uniendo } p,q\}$$

$$\text{diam}(M) = \sup_{p,q\in M} \text{dist}(p,q)$$

Teorema de Hopf-Rinow. Equivalen:

1. M es un espacio métrico completo (M es completa).
2. $\exp_p$ está definida en todo T_pM, $\forall p \in M$.
3. $\exists p \in M$ t.q. $\exp_p$ está definida en todo T_pM.
4. $\{$compactos de $M\}$=$\{$cerrados y acotados de $M\}$ (T. Heine-Borel).

Además, si M es completa, $\exists\alpha$ geodésica t.q. $\text{dist}(p,q) = L(\alpha)$.