GEOMETRÍA RIEMANNIANA

Escuela avanzada: Conjetura de Poincaré

Flujo de Ricci y aplicaciones

Magdalena Rodríguez

Granada, 28 de junio de 2007

2.jpg

Variación de la energía

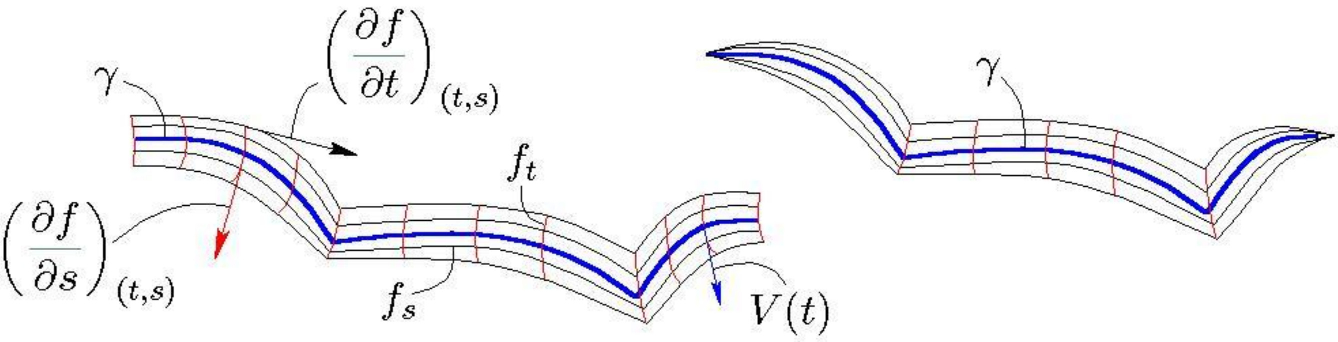
Energía de $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$: $\quad E(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 dt$.

$$L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma), \quad \text{y } \text{“}=\text{”} \Leftrightarrow \|\gamma'\| = \text{cte.}$$

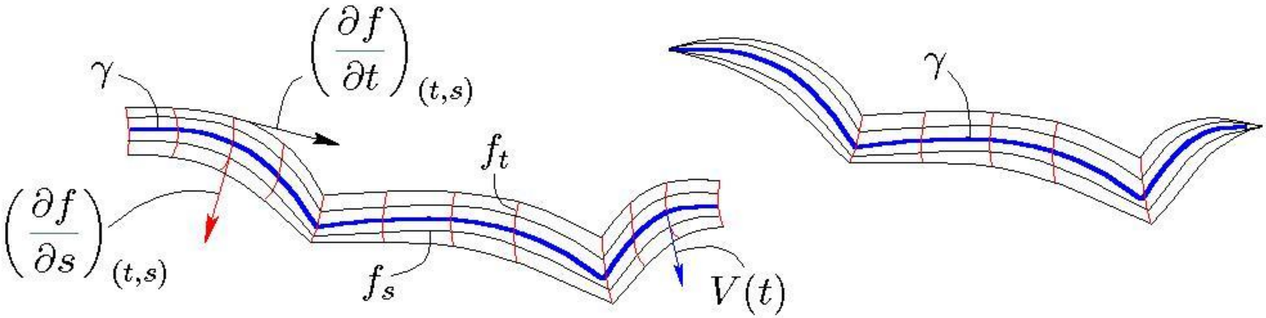
γ geodésica L-minimizante $\Rightarrow$ E-minimizante.

Variación de γ: $f : [a,b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} M$ con $f(t,0) = \gamma(t)$.

Variación propia de γ: $f : [a,b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} M$ con $f(t,0) = \gamma(t)$
y $f(a,s) = \gamma(a)$, $f(b,s) = \gamma(b)$.



Variación de la energía



$f_s(t) = f(t,s)$ $\rightsquigarrow$ curvas longitudinales.
$f_t(s) = f(t,s)$ $\rightsquigarrow$ curvas transversales.

$f(t,0) = \gamma(t) \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(t,0)} = \gamma'(t).$

$V(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{(t,0)} \in \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow$ campo variacional de f.

f propia $\Rightarrow V(a) = V(b) = 0.$

$$E :]-\varepsilon,\varepsilon[\overset{\mathcal{C}^\infty}{\longrightarrow} \mathbb{R}, \quad E(s) = E(f_s) = \int_a^b \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(t,s)} \right\|^2 dt$$

Usaremos: $\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$, pero $\frac{D}{dt}\left(\frac{DX}{ds}\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{DX}{dt}\right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)X.$

Fórmulas de variación de la energía

(I) $\frac{1}{2}\frac{dE}{ds}(0) = -\int_a^b \langle V, \frac{D\gamma'}{dt}\rangle dt + \langle V(b), \gamma'(b)\rangle - \langle V(a), \gamma'(a)\rangle.$

$\frac{dE}{ds}(0) = 0\,,\ \forall f$ variación propia de $\gamma \ \Leftrightarrow\ \gamma$ geodésica.

(II) f propia, γ geodésica $\Rightarrow\ \frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}(0) = -\int_a^b \langle \frac{D^2V}{dt^2} + R(V,\gamma')\gamma', V\rangle dt$

$= \int_a^b \left(\left\| \frac{DV}{dt} \right\|^2 - R(V,\gamma',\gamma',V) \right) dt.$

Forma índice:

γ geodésica, $\mathfrak{X}_0(\gamma) = \{V \in \mathfrak{X}(\gamma) \mid V(a) = V(b) = 0\}$

$I_\gamma : \mathfrak{X}_0(\gamma) \times \mathfrak{X}_0(\gamma) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$I_\gamma(V,W) = \int_a^b \left(\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \rangle - R(V,\gamma',\gamma',W) \right) dt$

I_γ def. pos. $\Rightarrow\ \gamma$ es mínimo de E (y L) $\rightsquigarrow$ T. índice de Morse

Si $\exists V \in \mathfrak{X}_0(\gamma)$ t.q. $I_\gamma(V,V) < 0 \ \Rightarrow\ \gamma$ no minimiza E (ni L).

Campos de Jacobi y "cut locus"

Sea γ una geodésica. Decimos que $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es de Jacobi ($V \in J_\gamma$) si

$$\frac{D^2V}{dt^2} + R(V,\gamma')\gamma' = 0$$

$V \in J_\gamma \;\Rightarrow\; \exists f$ variación de γ t.q. $f_s(t) = f(s,t)$ es geodésica, $\forall s$.
Si además $V(a) = 0 \Rightarrow f$ propia en a.

b es valor conjugado de a si $\exists V \in J_\gamma$, $V \neq 0$, con $V(a) = V(b) = 0$.

Caso particular: $k \leq 0 \;\Rightarrow\; \nexists$ val. conj. a lo largo de ninguna geodésica.

Suponemos γ definida en $[0,\infty[$ y p.p.a., y llamamos $p = \gamma(0)$.

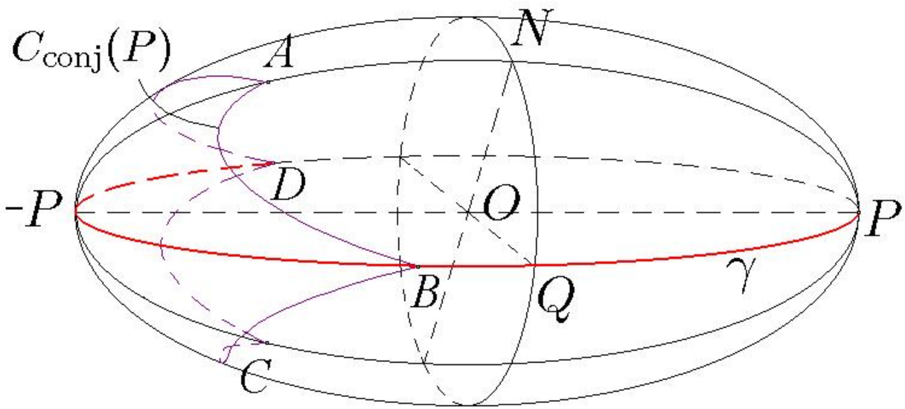
$$A = \{t \in [0,+\infty[\mid t = \text{dist}(p,\gamma(t))\} \qquad \text{(intervalo)}$$

Si $A = [0,b]$, entonces $\gamma(b)$ es un punto de corte de p a lo largo de γ.

Si $A = [0,+\infty[$, p no tiene puntos de corte a lo largo de γ.

$C(p) = \{$ puntos de corte de p a lo largo de geodésicas radiales en p $\}$.
(tiene medida nula)

Elipsoide



Teoremas de comparación

Teorema de Myers

$\gamma : [0, \ell] \longrightarrow M$ geodésica p.p.a.
$\mathrm{Ric}(\gamma') \geq (n-1)k,\ \ k > 0,\ \ \ \ell > \pi/\sqrt{k}\ \ \Rightarrow\ \ \exists$ valor conj. de 0 en $]0, \ell[$.
(luego γ no puede ser un mín de E ni L, ni siquiera local).

Teorema de Bishop

$\mathrm{Ric}(X) \geq (n-1)k,\ \ \forall \|X\| = 1,\ B(p, R)$ bola geodésica.

$$\mathrm{Vol}_g(B(p, R)) \leq \mathrm{Vol}_{g_k}(B_k(p_0, R)),$$

$B_k(p_0, R) =$ bola métrica en $(\mathbb{M}(k), g_k)$.
"$=$" $\Leftrightarrow$ las bolas son isométricas.

Teorema de Bishop-Gromov

M cpl., $k > 0$, $\mathrm{Ric}(X) \geq (n-1)k$, $\forall \|X\| = 1$ (M cpt, $\mathrm{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$).

$$\frac{\mathrm{Vol}_{g(B(p,R)}}{\mathrm{Vol}_{g(M)}} \geq \frac{\mathrm{Vol}_{g_k}(B_k(p_0,R))}{\mathrm{Vol}_{g_k}(\mathbb{S}^n(1/\sqrt{k}))}$$

"$=$" $\Leftrightarrow$ $(M, g), (\mathbb{S}^n(1/\sqrt{k}), g_k)$ isométricas.