

The background image shows a modern building with a courtyard. The building has white walls and large windows with brown frames. There are several air conditioning units mounted on the exterior walls. A set of wide, light-colored stone steps leads up to a second-floor entrance. The courtyard floor is paved with large, light-colored square tiles. A red metal railing runs along the edge of the courtyard. The scene is brightly lit, suggesting a sunny day.

GEOMETRÍA RIEMANNIANA

**Escuela avanzada: Conjetura de Poincaré
Flujo de Ricci y aplicaciones**

Magdalena Rodríguez

Granada, 28 de junio de 2007

Variación de la energía

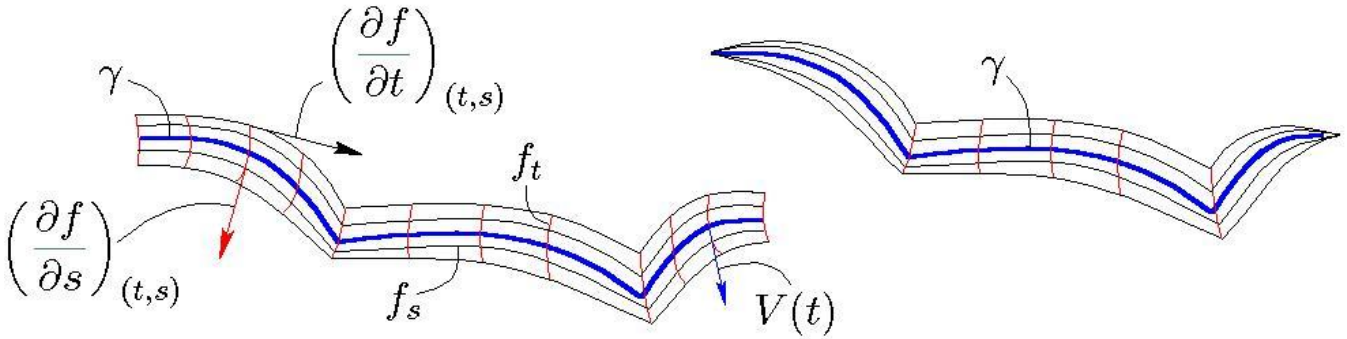
Energía de $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$: $E(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 dt$.

$$L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma), \quad \text{y } "=" \Leftrightarrow \|\gamma'\| = \text{cte.}$$

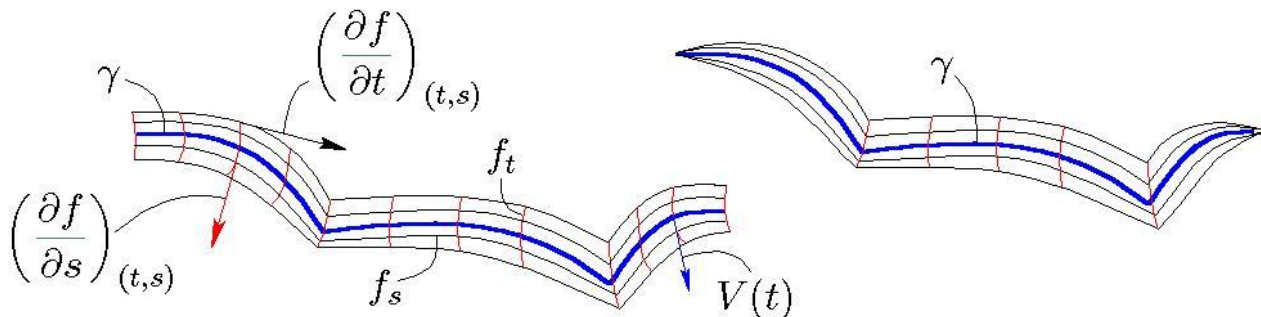
γ geodésica L -minimizante $\Rightarrow E$ -minimizante.

Variación de γ : $f : [a, b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} M$ con $f(t, 0) = \gamma(t)$.

Variación propia de γ : $f : [a, b] \times]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} M$ con $f(t, 0) = \gamma(t)$
y $f(a, s) = \gamma(a)$, $f(b, s) = \gamma(b)$.



Variación de la energía



$f_s(t) = f(t, s) \rightsquigarrow$ curvas longitudinales.

$f_t(s) = f(t, s) \rightsquigarrow$ curvas transversales.

$$f(t, 0) = \gamma(t) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(t,0)} = \gamma'(t).$$

$$V(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{(t,0)} \in \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \text{campo variacional de } f.$$

$$f \text{ propia} \Rightarrow V(a) = V(b) = 0.$$

$$E :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}, \quad E(s) = E(f_s) = \int_a^b \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(t,s)} \right\|^2 dt$$

$$\text{Usaremos: } \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right), \text{ pero } \frac{D}{dt} \left(\frac{DX}{ds}\right) = \frac{D}{ds} \left(\frac{DX}{dt}\right) + R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) X.$$

Fórmulas de variación de la energía

$$(I) \quad \frac{1}{2} \frac{dE}{ds}(0) = - \int_a^b \left\langle V, \frac{D\gamma'}{dt} \right\rangle dt + \langle V(b), \gamma'(b) \rangle - \langle V(a), \gamma'(a) \rangle.$$

$$\frac{dE}{ds}(0) = 0, \quad \forall f \text{ variación propia de } \gamma \Leftrightarrow \gamma \text{ geodésica.}$$

$$(II) \quad f \text{ propia, } \gamma \text{ geodésica} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2E}{ds^2}(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{D^2V}{dt^2} + R(V, \gamma')\gamma', V \right\rangle dt \\ = \int_a^b \left(\left\| \frac{DV}{dt} \right\|^2 - R(V, \gamma', \gamma', V) \right) dt.$$

Forma índice:

$$\gamma \text{ geodésica, } \mathfrak{X}_0(\gamma) = \{V \in \mathfrak{X}(\gamma) \mid V(a) = V(b) = 0\}$$

$$I_\gamma : \mathfrak{X}_0(\gamma) \times \mathfrak{X}_0(\gamma) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$I_\gamma(V, W) = \int_a^b \left(\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DW}{dt} \right\rangle - R(V, \gamma', \gamma', W) \right) dt$$

$$I_\gamma \text{ def. pos.} \Rightarrow \gamma \text{ es mínimo de } E \text{ (y } L) \rightsquigarrow \text{T. índice de Morse}$$

$$\text{Si } \exists V \in \mathfrak{X}_0(\gamma) \text{ t.q. } I_\gamma(V, V) < 0 \Rightarrow \gamma \text{ no minimiza } E \text{ (ni } L).$$

Campos de Jacobi y “cut locus”

Sea γ una geodésica. Decimos que $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es **de Jacobi** ($V \in J_\gamma$) si

$$\frac{D^2 V}{dt^2} + R(V, \gamma')\gamma' = 0$$

$V \in J_\gamma \Rightarrow \exists f$ variación de γ t.q. $f_s(t) = f(s, t)$ es geodésica, $\forall s$.

Si además $V(a) = 0 \Rightarrow f$ propia en a .

b es **valor conjugado** de a si $\exists V \in J_\gamma$, $V \neq 0$, con $V(a) = V(b) = 0$.

Caso particular: $k \leq 0 \Rightarrow \nexists$ val. conj. a lo largo de ninguna geodésica.

Suponemos γ definida en $[0, \infty[$ y p.p.a., y llamamos $p = \gamma(0)$.

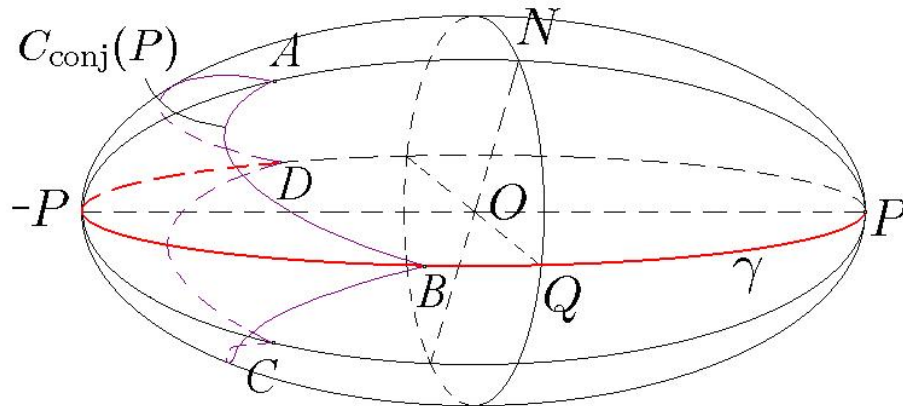
$$A = \{t \in [0, +\infty[\mid t = \text{dist}(p, \gamma(t))\} \quad (\text{intervalo})$$

Si $A = [0, b]$, entonces $\gamma(b)$ es un **punto de corte** de p a lo largo de γ .

Si $A = [0, +\infty[$, p no tiene puntos de corte a lo largo de γ .

$C(p) = \{ \text{puntos de corte de } p \text{ a lo largo de geodésicas radiales en } p \}.$
(tiene medida nula)

Elipsoide



Teoremas de comparación

Teorema de Myers

$\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ geodésica p.p.a.

$\text{Ric}(\gamma') \geq (n-1)k$, $k > 0$, $\ell > \pi/\sqrt{k} \Rightarrow \exists$ valor conj. de 0 en $]0, \ell[$.
(luego γ no puede ser un mín de E ni L , ni siquiera local).

Teorema de Bishop

$\text{Ric}(X) \geq (n-1)k$, $\forall \|X\| = 1$, $B(p, R)$ bola geodésica.

$$\text{Vol}_g(B(p, R)) \leq \text{Vol}_{g_k}(B_k(p_0, R)),$$

$B_k(p_0, R)$ = bola métrica en $(\mathbb{M}(k), g_k)$.

"=" $\Leftrightarrow$ las bolas son isométricas.

Teorema de Bishop-Gromov

M cpl., $k > 0$, $\text{Ric}(X) \geq (n-1)k$, $\forall \|X\| = 1$ (M cpt, $\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$).

$$\frac{\text{Vol}_g(B(p, R))}{\text{Vol}_g(M)} \geq \frac{\text{Vol}_{g_k}(B_k(p_0, R))}{\text{Vol}_{g_k}(\mathbb{S}^n(1/\sqrt{k}))}$$

"=" $\Leftrightarrow (M, g), (\mathbb{S}^n(1/\sqrt{k}), g_k)$ isométricas.