

Truco de DeTurck y principales técnicas para el Flujo de Ricci de Hamilton

Granada, julio de 2007

1. El RF y ecuaciones de evolución asociadas

• **RF** $\equiv$ evolución de una métrica R . fija g según:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\text{Ric}_{g_t},$$

con la condición inicial $g_0 = g$.

• **Fórmulas de evolución** para una variación

$$v_{ij} := \partial(g_t)_{ij} / \partial t.$$

★ **Componentes de g^{-1} :** $\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} v_{kl}$

★ **Símbolos de Christoffel (L-C):** $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\nabla_i v_{jl} + \nabla_j v_{il} - \nabla_l v_{ij} \right)$

★ **(1,3)-tensor de curvatura:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(R_{ijk}^m \right) = \\ \frac{1}{2} g^{lm} \left(\nabla_{ji}^2(v)_{kl} + \nabla_{jk}^2(v)_{il} - \nabla_{jl}^2(v)_{ik} - \nabla_{ij}^2(v)_{kl} - \nabla_{ik}^2(v)_{jl} + \nabla_{il}^2(v)_{jk} \right) \end{aligned}$$

★ **Tensor de Ricci:**

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ik} = \frac{1}{2} g^{ls} \left(\nabla_{si}^2(v)_{kl} + \nabla_{sk}^2(v)_{li} - \nabla_{sl}^2(v)_{ik} - \nabla_{ik}^2(v)_{ls} \right)$$

★ **Curvatura escalar:** $\frac{\partial}{\partial t} R_{g_t} = \Delta_g(\text{tr}_g v) + \text{div}_g(\text{div}_g v) - \langle \text{Ric}_g, v \rangle_g.$

1. El RF y ecuaciones de evolución asociadas

Fórmulas de evolución bajo el RF ($v_{ij} = -2R_{ij}$)

★ Componentes de g^{-1} : $\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2g^{ik} g^{jl} R_{kl}$

★ Símbolos de Christoffel (L-C):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = -g^{kl} \left(\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij} \right)$$

★ (1,3)-tensor de curvatura:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(R_{ijk}^m \right) = g^{lm} \left(-\nabla_{ji}^2 (R)_{kl} - \nabla_{jk}^2 (R)_{il} + \nabla_{jl}^2 (R)_{ik} + \nabla_{ij}^2 (R)_{kl} + \nabla_{ik}^2 (R)_{jl} - \nabla_{il}^2 (R)_{jk} \right)$$

★ Tensor de Ricci: $\frac{\partial R_{ik}}{\partial t} = -\Delta_g R_{ik} + 2g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} - 2g^{pq} R_{pi} R_{qk}$

★ Curvatura escalar: $\frac{\partial}{\partial t} (R_{g_t}) = -\Delta_{g_t} R_{g_t} + 2|\text{Ric}_{g_t}|_{g_t}^2$

★ Operador curvatura Riemanniana: $\frac{\partial(Rm)}{\partial t} = -\Delta_{g_t} Rm + \mathcal{Q}(Rm),$

donde $\mathcal{Q} \equiv$ tensor con dependencia cuadrática de Rm .

($Rm \equiv$ tensor curvatura considerado como un operador bilineal

$$Rm(X \wedge Y, Z \wedge W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle)$$

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

★ RF $\equiv$ sistema de EDP's para las componentes de g :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}.$$

★ T^a estándar: $\exists$ local de soluciones para sistemas estrictamente parabólicos.

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

Sistemas estrictamente parabólicos

- Tensor de Ricci como un operador diferencial

$$\text{Ric} : \Gamma(S^2_+M) = \text{Riem}(M) \longrightarrow \Gamma(S^2M)$$

- ★ Linearización de Ric. $\delta(\text{Ric}) : \Gamma(S^2M) \longrightarrow \Gamma(S^2M)$

$$\delta(\text{Ric})(v) = \frac{1}{2}g^{pq} \left(\nabla_q \nabla_j v_{kp} + \nabla_q \nabla_k v_{jp} - \nabla_q \nabla_p v_{jk} - \nabla_j \nabla_k v_{qp} \right)$$

- ★ Dado $\xi = \sum_i \xi_i dx^i$ covector,

Símbolo principal: $\hat{\sigma}[\delta(\text{Ric})](\xi) : S^2M \longrightarrow S^2M. \quad (\nabla_i \leftrightarrow \xi_i)$

$$[\hat{\sigma}[\delta(\text{Ric})](\xi)(v)]_{jk} := \frac{1}{2}g^{pq} \left(\xi_q \xi_j v_{kp} + \xi_q \xi_k v_{jp} - \xi_q \xi_p v_{jk} - \xi_j \xi_k v_{qp} \right)$$

- ★ A op. dif. no lineal elíptico $\Leftrightarrow \hat{\sigma}[\delta A](\xi)$ isomorfismo $\forall \xi \neq 0$

- ★ $\hat{\sigma}[\delta(\text{Ric})](\xi) \geq 0$ y tiene núcleo no trivial.

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

★ RF $\equiv$ sistema de EDP's para las componentes de g :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}.$$

★ T^a estándar: $\exists$ local de soluciones para sistemas estrictamente parabólicos.

★ RF $\equiv$ parabolicidad no estricta.

★ (parabólico/estrictamente parabólico) $\equiv$ (débilmente parab./parab.).

Teorema

Dada cualquier variedad Riemanniana (M^n, g) , $\exists \varepsilon > 0$ y una única solución C^∞ g_t del RF, con $t \in [0, \varepsilon)$ t.q. $g_0 = g$

★ **Hamilton (1995):** prueba alternativa $\exists$ y unicidad combinando

* Truco de DeTurck y

* Flujo del calor para las aplicaciones armónicas.

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

- **Idea de DeTurck:** Modificar el RF $\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\text{Ric}_{g_t}$

para obtener un flujo

- ★ estrictamente parabólico:

$$\hat{\sigma} [\delta(-2\text{Ric} + \text{operador de 2º orden en la métrica})](\xi)(v) > 0$$

- ★ equivalente al RF:

- $\hat{g}_t = \varphi_t^* g_t, \{ \varphi_t \} \subset \text{Dif}(M)$
familia 1-param.

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

Inciso técnico

- Sea $\{X_t\}_{0 \leq t < T \leq \infty}$ una familia de campos vectoriales de clase C^{k+1} (con dependencia C^{k+1} del tiempo) sobre una variedad compacta M n -dimensional. Entonces existe una familia uniparamétrica de C^k -difeomorfismos $\{\varphi_t : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset M\}_{0 \leq t < T \leq \infty}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(p) = X_t(\varphi_t(p)) \\ \varphi_0(p) = p \end{cases}$$

para todo $p \in M$ y $t \in [0, T)$.

- $\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\varphi_{t+s}^* g) = \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X_t} g).$
- $(\mathcal{L}_X g)_{ij} = g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} X) = \nabla_i X_j^b + \nabla_j X_i^b$

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

- **Idea de DeTurck:** Modificar el RF $\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\text{Ric}_{g_t}$ para obtener un flujo

★ estrictamente parabólico:

$$\hat{\sigma} [\delta(-2\text{Ric} + \text{operador de } 2^{\text{o}} \text{ orden en la métrica })](\xi)(v) > 0$$

★ equivalente al RF:

$$\begin{aligned} &\bullet \hat{g}_t = \varphi_t^* g_t, \{ \varphi_t \} \subset \text{Dif}(M) \\ &\quad \text{familia 1-param.} \longrightarrow \frac{\partial \hat{g}_t}{\partial t} = -2\text{Ric}_{\hat{g}_t} + \mathcal{L}_{W_t} \hat{g}_t \\ &\quad \text{generada por } \{ X_t \} \subset \text{Dif}(M) \end{aligned}$$

donde $\{ W_t := (\varphi_t^{-1})_* X_t \}$
RF modificado (MRF)

- Si $W = F(\Gamma(\hat{g}_t)) \Rightarrow \mathcal{L}_{W_t} \hat{g}_t$ operador de 2^{o} orden en $\hat{g}_t$.

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

Paso 1. Flujo de Ricci-DeTurck (RDTF):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij} + \nabla_i W_j + \nabla_j W_i \\ g(0) = g_0 \end{array} \right., \text{ donde}$$

$$W_j(g) = g_{jk} g^{pq} \left(\Gamma_{pq}^k - \tilde{\Gamma}_{pq}^k \right),$$

con $\tilde{g} \in \text{Riem}(M)$ fija

Paso 2. RDTF $\equiv$ sistema de EDP's estrictamente parabólico.

2. Existencia local de soluciones. Truco de DeTurck

Paso 1. Flujo de Ricci-DeTurck (RDTF):

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= -2R_{ij} + \nabla_i W_j + \nabla_j W_i \\ g(0) &= g_0 \end{cases}, \text{ donde}$$

$$W_j(g) = g_{jk} g^{pq} \left(\Gamma_{pq}^k - \tilde{\Gamma}_{pq}^k \right),$$

con $\tilde{g} \in \text{Riem}(M)$ fija

Paso 2. RDTF $\equiv$ sistema de EDP's estrictamente parabólico.

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} M \text{ cerrada} \\ g_0 \in \text{Riem}(M) \end{array} & \xrightarrow{\text{t}^a \text{ estándar}} \begin{array}{l} \exists ! g_t \text{ RDTF}, t \in [0, \delta) \text{ para algún } \delta > 0 \\ \text{con } g(0) = g_0 \end{array} \end{array}$$

Paso 3. Difeomorfismos de DeTurck: $\{\varphi_t\} \subset \text{Dif}(M)/$

$$(\text{DTD}) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(p) &= -W_{g_t}^\#(\varphi_t(p)) \\ \varphi_0 &= id \end{cases}$$

$$\star M \text{ compacta} \xrightarrow{\text{lema}} \exists \varphi_t(p), t \in [0, \delta)$$

Paso 4. $\bar{g}_t := \varphi_t^* g_t, t \in [0, \delta)$ RF con $\bar{g}(0) = g_0$.

3. Principios del máximo

Principios del máximo

- ★ Herramienta para el estudio de EDP's parabólicas de 2º orden.
- ★ Evolución de Rm_{g_t} , Ric_{g_t} y R_{g_t} cuando g_t RF.
- ★ **Posible cuestión:**

Sea g_t RF en $M^n \times [0, T)$ / $R_{g_0}(x) > 0 \ \forall x \in M$
 ¿se cumple $R_{g_t}(x) > 0 \ \forall x \in M$ y $\forall t \in [0, T)$?

3. Principios del máximo

- Principios del máximo escalares (para funciones)

★

Ppio. Máx. débil para la ecuación del calor + término gradiente

$\{g_t\}_{\{0 \leq t < T\}} \subset \text{Riem}(M^n)$ familia 1-param.

$$u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}, C^2 / \quad \frac{\partial u}{\partial t} \geq -\Delta_{g_t} u + \langle X_t, \nabla u \rangle$$

Si $u(\cdot, 0) \geq C$, para alguna constante $C \Rightarrow$
 $u(\cdot, t) \geq C, \forall t \in [0, T).$

- (M^n, g_t) RF con $t \in [0, T).$

Si $R_{g_0}(\cdot) \geq c$ para alguna $c \in \mathbb{R} \Rightarrow R_{g_t}(\cdot) \geq c \forall t \in [0, T).$

3. Principios del máximo

• Principios del máximo escalares (para funciones)

★

Ppio. Máx. débil para la ecuación del calor + término gradiente

$\{g_t\}_{\{0 \leq t < T\}} \subset \text{Riem}(M^n)$ familia 1-param.

+ término de reacción no lineal

$$u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}, C^2 / \quad \frac{\partial u}{\partial t} \geq -\Delta_{g_t} u + \langle X_t, \nabla u \rangle + F(u)$$

donde

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz.

Si $u(\cdot, 0) \geq C$, para alguna constante $C \Rightarrow$

$$u(\cdot, t) \geq \varphi_t, \forall t \in [0, T),$$

donde φ_t es solución de

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_t}{dt} = F(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = C \end{cases}$$

• **Versión fuerte:** $u(\cdot, t) > \varphi_t, \forall t \in [0, T)$ salvo que
 $u(\cdot, t) \equiv \varphi_t.$

3. Principios del máximo

• Principio del máximo para 2-tensores simétricos

$\{g_t\}_{\{0 \leq t < T\}} \subset \text{Riem}(M^n)$ familia 1-param.

$\alpha(t)$ 2-tensor simétrico / $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \geq -\Delta_{g_t} \alpha + \beta$, donde

- $\beta \equiv$ polinomio en α (usando g_t para contraer índices),
- β cumple la hipótesis del autovector nulo, i.e.

$$\beta(V, V)_{(x,t)} \geq 0 \quad \text{siempre que} \quad \alpha(\cdot, V)_{(x,t)} = 0$$

Si $\alpha(0) \geq 0 \Rightarrow \alpha(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T)$.

3. Principios del máximo

★ Evolución del tensor de Ricci:

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial t} = -\Delta_g R_{ik} + 2g^{pr}g^{qs}R_{piqk}R_{rs} - 2g^{pq}R_{pi}R_{qk}$$

★ g_t RF en $M^n \times [0, T)$, ¿ $\text{Ric}_{g_0} \geq 0 \Rightarrow \text{Ric}_{g_t} \geq 0 \forall t \in [0, T)$?

* En general: no para $n \geq 4$.

* Sí para $n = 3$. (Clave: $Rm = \frac{Sc}{2n(n-1)}g \odot g + \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{Sc}{n}g \right) \odot g$
donde $\odot$ es el

producto de Kulkarni-Nomizu de 2-tensores simétricos)

★ Evolución del tensor de Ricci en 3 dim:

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial t} = -\Delta_g R_{ik} + 3RR_{ik} - 6g^{pq}R_{ip}R_{kq} + \left(2|\text{Ric}|^2 - R^2 \right) g_{ik}$$

★ **Resultado:**

g_t RF en $M^3 \times [0, T)$ / $\text{Ric}_{g_0} \geq 0 \Rightarrow \text{Ric}_{g_t} \geq 0 \forall t \in [0, T)$.

3. Principios del máximo

Usando un principio de máximo fuerte para tensores, Hamilton demuestra:

Teorema *Sea M una variedad conexa. Sea $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$ una familia de métricas riemannianas sobre M con operador curvatura no negativo que verifica la ecuación del flujo de Ricci. Entonces para cada $t \in (0, T]$, la imagen $\text{Im}(\text{Rm}_{g(t)})$ del operador curvatura es un subfibrado C^∞ de $\Lambda^2(T^*M)$ que es invariante bajo traslaciones paralelas espaciales. Existe una sucesión de tiempos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ tales que para cada $1 \leq i \leq k$, $\text{Im}(\text{Rm}_{g(t)})$ es una subálgebra de Lie de $\Lambda^2(T_m^*M) \cong \mathfrak{o}(n)$ que es independiente de t para $t \in (t_{i-1}, t_i]$. Además, $\text{Im}(\text{Rm}_{g(t_i)}) \subset \text{Im}(\text{Rm}_{g(t_{i+1})})$.*

En particular, bajo las hipótesis del teorema, una descomposición producto local en un tiempo dado implica una descomposición isométrica local en tiempos anteriores.

4. Desigualdades de Harnack

★ Para la ecuación del calor (Li-Yau, 1986):

$$\left. \begin{array}{l} u : M^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{sol. } > 0 \text{ de } \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u \\ \text{sobre } (M, g) / \text{Ric}_g \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para cualesq. } x_1, x_2 \in M \text{ y } 0 < t_1 < t_2 \\ \frac{u(x_2, t_2)}{u(x_1, t_1)} \geq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-n/2} e^{-d(x_1, x_2)^2 / 4(t_2 - t_1)} \end{array}$$

★ En 1988, Hamilton adapta esta desigualdad a un RF en dim. 2.

★ 1993: Estimación matricial de Harnack para el RF en dim. n.

★ Desigualdad diferencial de Hamilton-Harnack (versión traza):

$$(M^n, g_t) \text{ RF con } t \in [0, T) \left\{ \begin{array}{l} \text{cerrada, o bien} \\ \text{completa con curvatura acotada} \end{array} \right. \text{ y}$$

$Rm_M \geq 0$. Entonces, $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{t} + 2 \langle \nabla R, V \rangle + 2\text{Ric}(V, V) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T).$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{t - t_0} + 2 \langle \nabla R, V \rangle + 2\text{Ric}(V, V) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, T).$$

★ Consecuencia $\frac{\partial}{\partial t} ((t - t_0)R) \geq 0$

4. Desigualdades de Harnack

★ Para la ecuación del calor (Li-Yau, 1986):

$$\forall x_1, x_2 \in M \text{ y } 0 < t_1 < t_2, \quad \frac{u(x_2, t_2)}{u(x_1, t_1)} \geq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-n/2} e^{-d(x_1, x_2)^2/4(t_2-t_1)}$$

★ Desigualdad diferencial de Hamilton-Harnack (versión traza):

(M^n, g_t) RF con $t \in [0, T)$ completa con curvatura acotada y $Rm_M \geq 0$,

$$\forall V \in \mathfrak{X}(M) \quad \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{t - t_0} + 2 \langle \nabla R, V \rangle + 2\text{Ric}(V, V) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, T).$$

★ Si la sol. es antigua, tomando $t_0 \rightarrow -\infty$,

$$\frac{\partial R}{\partial t} + 2 \langle \nabla R, V \rangle + 2\text{Ric}(V, V) \geq 0.$$

Si ahora tomamos $V = 0$, $\frac{\partial R}{\partial t} \geq 0$

Si ahora tomamos V vector tangente a una curva parametrizada por el tiempo e integramos entre los dos extremos de la curva, obtenemos la

★ Versión integral: dados $x_1, x_2 \in M$ y $0 < t_1 < t_2$, se cumple

$$\frac{R(x_2, t_2)}{R(x_1, t_1)} \geq e^{-d_{t_1}(x_1, x_2)^2/2(t_2-t_1)}$$

En particular, si $R(x_2, t_2) = 0$ en algún (x_2, t_2) , entonces g_t es llana para todo t .

5. Estimaciones de Shi

- ★ Aplicación de los principios del máximo.
- ★ Acotaciones de $|Rm|$ implican acotaciones de $|\nabla^k Rm|$.
- ★ Aplicación del principio del máximo a (combinaciones de) las ecuaciones de evolución de siguiendo un proceso de inducción.

5. Estimaciones de Shi

Estimación de Bernstein-Bando-Shi

• Estimaciones globales para las derivadas de la curvatura

Sea (M^n, g) RF, $t \in [0, T)$.

Se cumple: $\left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha > 0 \\ \forall m \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \exists C_m \equiv C(m, n, \alpha) /$

si $|Rm(x, t)|_{g_t} \leq K \quad \forall x \in M^n \quad \text{y} \quad t \in [0, \alpha/K],$

entonces

$$|\nabla^m Rm(x, t)|_{g_t} \leq \frac{C_m K}{t^{m/2}} \quad \forall x \in M^n \quad \text{y} \quad t \in (0, \alpha/K].$$

- ★ Shi prueba una **versión local** del resultado anterior.
- ★ Aplicación en la prueba de la $\exists$ **global de soluciones** del RF.

6. Resultados para la prueba de la existencia global

- g_t RF en $M^n \times [0, T)$ /

$$\exists K < \infty \text{ constante } |Rm(x, t)|_{g_t} \leq K \quad \forall (x, t)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \bar{g} \in \text{Riem}(M) \\ \forall m \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \text{ se tiene } \left\{ \begin{array}{l} \exists C_m = C(m, K, g_0, \bar{g}) / \\ |\bar{\nabla}^m g(x, t)|_{\bar{g}} \leq C_m \quad \begin{array}{l} \forall x \in M \\ \forall t \in [0, T) \end{array} \\ \text{donde } \bar{\nabla} \equiv \nabla^{\bar{g}}. \end{array} \right.$$

- **Lema:** (M^n, g_t) RF. Si $\exists K$ constante / $|\text{Ric}| \leq K$ en $[0, T]$, entonces

$$e^{-2KT} g(x, 0) \leq g(x, t) \leq e^{2KT} g(x, 0) \quad \forall x \in M \quad \forall t \in [0, T]$$

Las singularidades sólo se dan en puntos donde la curvatura explota.

7. Dilataciones parabólicas

★ **Propiedad inmediata:** g_t RF $\longrightarrow g_\lambda(t) = \lambda^2 g(t/\lambda^2)$ RF.

• Sea ahora (M^n, g_t) RF en $[0, T)$, $T < +\infty$.

★ Tomamos $\{(x_i, t_i) : x_i \in M_i, t_i \rightarrow T\} / |Rm(x_i, t_i)| \rightarrow \infty$.

★ **Condición extra:** $\exists C < \infty /$

$$|Rm|_{(x,t)} \leq C |Rm|_{(x_i, t_i)} \quad \begin{array}{l} \forall x \in M \\ \forall t \leq t_i \end{array}$$

• **Dilatación** de factor $Q_i := |Rm|_{(x_i, t_i)}$

$$g_i(t) = Q_i g(t_i + t/Q_i)$$

★ **Transformación:** - Las distancias se dilatan un factor $\sqrt{Q_i}$.

- La curvatura escalar queda multiplicada por $1/Q_i$.

- $t = t_i$ en el flujo original $\Rightarrow t = 0$ en el flujo dilatado.

- $g_i(t)$ RF en $[-t_i Q_i, (T - t_i) Q_i)$.

7. Dilataciones parabólicas

★ **Propiedad inmediata:** g_t RF $\longrightarrow g_\lambda(t) = \lambda^2 g(t/\lambda^2)$ RF.

● Sea ahora (M^n, g_t) RF en $[0, T)$, $T < +\infty$.

★ Tomamos $\{(x_i, t_i) : x_i \in M_i, t_i \rightarrow T\}$ / $|Rm(x_i, t_i)| \rightarrow \infty$.

★ **Condición extra:** $\exists C < \infty$ /

$$|Rm|_{(x,t)} \leq C |Rm|_{(x_i, t_i)} \quad \begin{array}{l} \forall x \in M \\ \forall t \leq t_i \end{array}$$

● **Dilatación** de factor $Q_i := |Rm|_{(x_i, t_i)}$

$$g_i(t) = Q_i g(t_i + t/Q_i)$$

★ **Curvatura de la sucesión dilatada:**

$$|Rm|_{g_i(t)}(p) \leq C \quad \begin{cases} \forall p \in M \\ \forall t \leq 0 \\ \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

★ El límite (si $\exists$) será una solución

* antigua ($t \in (-\infty, 0]$) y

* no llana ($|Rm|_{(x_i, 0)} = 1 \forall i$).

8. Estimación “pinching” de Hamilton-Ivey

- ★ Aplicación de los principios del máximo.
- ★ Válida sólo para dim. 3.
- ★ Sin hipótesis extra sobre la curvatura.

$$\begin{array}{l}
 (M^3, g_t) \text{ RF} \\
 R_0 := \min_M R(\cdot, 0)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \Rightarrow \\
 \text{y t.q se cumple} \\
 Rm_{g_t} \geq -\phi(R_{g_t})
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \exists \phi : [R_0, +\infty) \rightarrow (0, \infty) / \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r} = 0
 \end{array}$$

• Consecuencias.

- ★ La curvatura escalar controla todas las curvaturas.

$$R + 2\phi(R) \geq Rm \geq -\phi(R).$$

- ★ Si $(M_\infty^3, g_\infty(t))$ es límite de una suc. de dilataciones parabólicas, entonces $Rm_{g_\infty(t)} \geq 0$.

9. Teoremas de compacidad tipo Cheeger-Gromov

- Técnica para el estudio de las regiones singulares
= dilatar + tomar límites.

- Objetivos

- (1) Definición de convergencia de flujos.
- (2) Encontrar un teorema de compacidad.

9. Teoremas de compacidad tipo Cheeger-Gromov

Convergencia y compacidad de variedades

• **Definición de convergencia:** Una sucesión punteada de variedades Riem. completas $\{(M_i^n, g_i, x_i)\}$ converge en sentido C^∞ a una variedad Riem. completa punteada $(M_\infty^n, g_\infty, x_\infty)$ si

$$(1) \exists \text{ una suc. de abiertos } U_i \subset M_\infty, \text{ con } \begin{cases} x_\infty \in U_i \forall i \\ U_i \subset U_{i+1} \forall i \\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = M_\infty \end{cases}$$

(2) $\exists$ una suc. de difeomorfismos $\phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subset M_i /$

$$\star \phi_i(x_\infty) = x_i \quad \forall i,$$

$\star$ Para cualquier compacto $K \subset M_\infty$:

$$\phi_i^* g_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g_\infty \quad \text{uniformemente}$$

$\star$ Lo mismo con todas sus derivadas covariantes (resp. a una conexión fijada).

9. Teoremas de compacidad tipo Cheeger-Gromov

- Observaciones acerca de la definición de convergencia

- (a) El límite sigue siendo una variedad diferenciable y de la misma dim.
- (b) Perdemos información global acerca de los elementos de la sucesión.
- (c) Puede suceder M_i compacta $\forall i$ y M_∞ no compacta.
- (d) Importancia de los puntos base de la sucesión.
- (e) La información local puede ser insuficiente.

9. Teoremas de compacidad tipo Cheeger-Gromov

- Hacia un teorema de compacidad

★ **Cuestión:** Dada $\{(M_i^n, g_i, x_i)\}$,

¿existe una subsucesión convergente?

★ **Condiciones necesarias para la convergencia:**

(a) Algún control sobre la curvatura.

(b) Una cota inferior > 0 para el radio de inyectividad.

★ El teorema de compacidad dirá que esas condiciones también son suficientes.

9. Teoremas de compacidad tipo Cheeger-Gromov

• Teorema de compacidad de Cheeger-Gromov (para variedades Riem. punteadas):

Sea $\mathcal{M}_i := \{(M_i^n, g_i, x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ suc. punteada de var. Riem. completas t.q.

(1) $\forall r > 0, \exists C_{r,q} < +\infty$ / para todo i

$$|\nabla^q Rm_{g_i}|_{g_i} \leq C_{q,r} \quad \text{en} \quad B_{g_i}(x_i, r),$$

donde $\nabla^q \equiv (\nabla^{g_i})^q$.

(2) $\text{inj}_{g_i}(x_i) \geq c > 0$

Entonces $\mathcal{M}_i$ subconverge en sentido C^∞ a una var. Riem. completa punteada $(M_\infty^n, g_\infty, x_\infty)$.

10. Convergencia y compacidad de flujos

Fijamos un intervalo (a, b) , donde $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$

• **Definición de convergencia:** Una sucesión punteada **flujos de Ricci** completos con $t \in (a, b)$ $\{(M_i^n, g_i(t), x_i)\}$ converge en sentido C^∞ a un **flujo de Ricci** completo punteado $(M_\infty^n, g_\infty(t), x_\infty)$ si

$$(1) \exists \text{ una suc. de abiertos } U_i \subset M_\infty, \text{ con } \begin{cases} x_\infty \in U_i \forall i \\ U_i \subset U_{i+1} \forall i \\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = M_\infty \end{cases}$$

$$(2) \exists \text{ una suc. de difeomorfismos } \phi_i : U_i \longrightarrow V_i \subset M_i /$$

$$\star \phi_i(x_\infty) = x_i \quad \forall i,$$

★ Para cualquier compacto $K \subset M_\infty \times (a, b)$:

$$\phi_i^* g_i(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g_\infty(t) \quad \text{uniformemente.}$$

★ Lo mismo con todas sus derivadas covariantes (resp. a una conexión fijada) y **temporales**.

10. Convergencia y compacidad de flujos

• Teorema de compacidad tipo Cheeger-Gromov (para RF's) [Hamilton, 1995]:

Sea $\mathcal{M}_i := \{(M_i^n, g_i(t), x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ suc. punteada de flujos de Ricci completos t.q.

(1) $\forall r > 0$ y $\forall t \in (a, b)$, $\exists C_{r,t} < +\infty$ / para todo i

$$\left| Rm_{g_i(t)} \right|_{g_i(t)} \leq C_{r,t} \quad \text{en} \quad B_{g_i(t)}(x_i, r).$$

(2) $\text{inj}_{g_i(t)}(x_i) \geq c > 0$

Entonces $\mathcal{M}_i$ subconverge en sentido C^∞ a un flujo de Ricci completo punteado $(M_\infty^n, g_\infty, x_\infty)$.

11. las soluciones autosemejantes del Flujo de Ricci

Solitones (homotéticos) de Ricci

- **Definición:** soluc. del RF de la forma $g_t = a(t)\varphi_t^*g_0$, siendo a alguna función > 0 / $a(0) = 1$ y $\{\varphi_t : t \in I\} \subset \text{Dif}(M)$.

- ★ Puntos fijos en $\text{Riem}(M)/\text{Dif}(M) \oplus \mathbb{R}^+$

11. las soluciones autosemejantes del Flujo de Ricci

• **Definición:** soluc. del RF de la forma $g_t = a(t)\varphi_t^*g_0$ (con $a(0) = 1$).

★ **Caracterización puntual y forma canónica:**

(a) g_t solitón de Ricci $\Rightarrow \exists X_0 \in \mathfrak{X}(M) /$
 $\alpha g_0 + \mathcal{L}_{X_0}g_0 = -2\text{Ric}_{g_0}, \quad (*)$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) Rec, si $(g_0, X_0, \alpha) \in \text{Riem}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathbb{R}$ cumple $(*)$ level=2

$\Rightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} g(t) \text{ RF con } g(0) = g_0 \\ \{\varphi_t\} \subset \text{Dif}(M) \end{array} \right\} / \forall t \text{ con } 1 + \alpha t > 0 \text{ se tiene}$

(1) $g_t = (1 + \alpha t)\varphi_t^*g_0$ **(forma canónica)** level=7

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{estables} & \text{si } \alpha = 0 \\ \text{expansivos} & \text{si } \alpha > 0 \\ \text{contractivos} & \text{si } \alpha < 0 \end{array} \right. \text{ level}=8$

(2) $\frac{\partial \varphi_t(p)}{\partial t} = X_t(\varphi_t(p)), \quad \text{con } X_t := (1 + \alpha t)^{-1}X_0$ level=5

(3) $-2\text{Ric}_{g_t} = \frac{\alpha}{1 + \alpha t}g_t + \mathcal{L}_{X_t}g_t$ level=6 **(ec. de caracterización)** level=7

11. las soluciones autosemejantes del Flujo de Ricci

• **Solitones gradiente:** solitones homotéticos con $X_t = \text{grad}_{g_t} f_t$, para alguna familia $\{f_t\} \subset C^\infty(M)$ (potencial del solitón).

★ **Caracterización puntual y forma canónica:**

(a) g_t solitón gradiente $\Rightarrow \exists f_0 \in C^\infty(M) /$
 $\alpha g_0 + 2\nabla_{g_0}^2 f_0 = -2\text{Ric}_{g_0}, (*)$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) Rec, si $(g_0, f_0, \alpha) \in \text{Riem}(M) \times C^\infty(M) \times \mathbb{R}$ cumple $(*)$

$$\Rightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} g(t) \text{ RF con } g(0) = g_0 \\ \{f(t)\} \subset C^\infty(M) \text{ con } f(0) = f_0 \\ \{\varphi_t\} \subset \text{Dif}(M) \end{array} \right\} / \forall t \text{ con } 1 + \alpha t > 0$$

(1) $g_t = (1 + \alpha t) \varphi_t^* g_0, \quad f_t = f_0 \circ \varphi_t = \varphi_t^* f_0$

(2) $\frac{\partial \varphi_t(p)}{\partial t} = X_t(\varphi_t(p)), \quad \text{con } X_t := (1 + \alpha t)^{-1} X_0 = \text{grad}_{g_t} f_t$

(3) $\text{Ric}_{g_t} + \frac{\alpha}{2(1 + \alpha t)} g_t + \nabla_{g_t}^2 f_t = 0, \quad \frac{\partial f_t}{\partial t} = |\nabla_{g_t} f_t|_{g_t}^2$

11. las soluciones autosemejantes del Flujo de Ricci

- Solitón compacto estable $\Rightarrow$ familia de métricas Ricci llanas, (i.e.

$$g_t = g_0 \quad \forall t \text{ y } (M, g_0) \text{ cumple } \text{Ric}_{g_0} = 0).$$

- g_t solitón compacto expansivo

$$\Rightarrow \text{para cada } t \text{ fijo, } g_t \text{ Einstein / } R_{g_t} < 0.$$

- ¿ g_t solitón compacto contractivo $\Rightarrow g_t$ Einstein para cada t fijo?

★ Sí para $n = 2, 3$.

★ Contraejemplos para $n = 4$:

* $\mathbb{CP}^2 \# (-\mathbb{CP}^2)$, métrica de Koiso (Koiso-H.D. Cao, '90).

* $\mathbb{CP}^2 \# 2(-\mathbb{CP}^2)$, métrica $S^1 \times S^1$ -invariante (Wang-Zhu, '01).

Subproductos

- Si, para algún $X \in \mathfrak{X}(M)$, g cumple

$$\mathcal{L}_X g = -2\text{Ric}_g$$

entonces g es una métrica Ricci llana.

- Si, para algún $X \in \mathfrak{X}(M)$, g cumple la igualdad

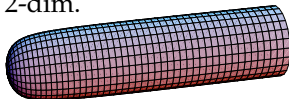
$c g + \mathcal{L}_X g = -2\text{Ric}_g$ con $c > 0$, entonces g es una métrica de Einstein con $R_g < 0$.

11. las soluciones autosemejantes del Flujo de Ricci

Ejemplo importante: los solitones cigar

- **Solitón cigar:** var. Riem. completa 2-dim.

$$(\mathbb{R}^2, g_\Sigma), \text{ con } g_\Sigma = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$



- **Propiedades:**

- ★ Simetría rotacional: $g_\Sigma = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 + r^2} \Big|_{r=\sinh \ell} = d\ell^2 + \tanh^2 \ell d\theta^2.$
- ★ $\text{Sec}_{g_\Sigma} = \frac{1}{ch^2 \ell} > 0$ para todo ℓ .
- ★ $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ es asintótica en el infinito $\mathbb{R} \times S^1$.
- ★ RF con condición inicial $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma) \equiv$ solitón gradiente estable.

El solitón “cigar” da lugar a un solitón gradiente de la forma $\varphi_s^* g_\Sigma$, donde φ_s es el flujo del campo vectorial $-\tanh \ell \partial_\ell$.

- **Solitón cigar $\times \mathbb{R}$:** $(\Sigma, g) \equiv$ 3-var. Riem. $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, g_\Sigma + dt^2)$
 - ★ solitón gradiente estable que no es Einstein.