

Escuela Avanzada: La Conjetura de Poincaré

Esther Cabezas Rivas

Granada, 28 junio – 7 julio de 2007

I.3 Clasificación modelos singulares



Clasificación de las κ -soluciones

I.4 Clasificación de las sol. singulares

I.4.1 Clasificación local. $\Leftarrow$ Tma del entorno canónico

I.4.2 Clasificación global.

Fase II. Flujo de Ricci con cirugía

II.1 Proceso de cirugía bien def (descripción)

II.2 Conjunto de instantes singulares discreto

Fase III. Extinción en tiempo finito

Demostración de Hamilton-Perelman de la CP

Fase 0. Inicio del flujo hasta 1ª singularidad

★ Resultados técnicos del RF de Hamilton.

Fase I. Análisis de las singularidades

I.1 Sucesión de dilataciones de la sol. singular

I.2 Existencia de una subsucesión convergente

I.2.1 Condiciones para $\exists$ (tma de compacidad de Hamilton)

(A) Mayoración de la curvatura.

(B) Minoración del radio de inyectividad

I.2.2 Verificación de las condiciones de I.2.1

De (B): Tma de no-colapso local

Herramienta: monotonía del volumen reducido

Geometría de comparación
para el Flujo de Ricci
y
resultados de no-colapso

Objetivos

- Introducción del **concepto de volumen reducido** (VR).
- **Prerrequisitos:** Desarrollo de una geometría e-t.
 - ★ Reconstrucción de la teoría de geodésicas y campos de Jacobi.
- **Objetivo fundamental:** demostrar la monotonía del VR.
- **Importancia (en el análisis de las sing del FR):**
 - ★ Demostración del tma. de no colapso.
 - ★ Fundamental para entender la estructura de las κ -soluciones.

Hipótesis de partida

- $\{h(\tau)\}_{\tau \in I} \subset \mathfrak{M}(M^n)$
- $h(\cdot)$ solución del FR retrógrado (FRR):

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}(\tau) = 2\text{Ric}_{h(\tau)}, \quad \tau \in I$$

- Solución completa.
- $|Rm(x, \tau)| \leq C_0 < +\infty \quad \forall (x, \tau) \in M \times I$

★ Obtención práctica del FR retrógrado:

$$\left. \begin{array}{l} (M^n, g(t)) \text{ RF} \\ \text{Fijar } t_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau := t_0 - t, \quad h(\tau) = g(t_0 - t) \text{ FRR}$$

Motivación “heurística”

- $\gamma : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow M$ curva C^∞ (con $\tau_1 \geq 0$).
- **Grafo e-t de γ .** $\tilde{\gamma} : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow M \times [\tau_1, \tau_2] / \tilde{\gamma}(\tau) = (\gamma(\tau), \tau)$.

Cambio: $\sigma = 2\sqrt{\tau}, \beta(\sigma) = \gamma(\sigma^2/4)$.

- **Métrica e-t:** $\tilde{h} = h + R_h d\tau^2$.
- **$\tilde{h}$ -Energía de $\tilde{\beta}$.** ($\sigma_i = 2\sqrt{\tau_i}$)

$$\begin{aligned} E_{\tilde{h}}(\tilde{\beta}) &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\tilde{\beta}'(\sigma)|_{\tilde{h}}^2 d\sigma = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tau} |\tilde{\gamma}'(\tau)|_{\tilde{h}}^2 d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tau} \left(|\gamma'(\tau)|_{h_\tau}^2 + R(\gamma(\tau), \tau) \right) d\tau \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ -longitud y L-distancia

- **$\mathcal{L}$ -longitud** de $\gamma : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow M$ curva C^∞ (con $\tau_1 \geq 0$).

$$\mathcal{L}_h(\gamma) := \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tau} \left(R(\gamma(\tau), \tau) + |\gamma'(\tau)|_{h_\tau}^2 \right) d\tau$$

(Fijamos $p \in M$, tomaremos $\tau_1 = 0$ y llamaremos $\bar{\tau} = \tau_2$).

- ★ **Consecuencias inmediatas** $\left\{ \begin{array}{l} * [\tau_1, \tau_2] \subset I. \\ * \mathcal{L} \text{ puede ser } < 0. \end{array} \right.$

- **L-distancia** (a $p \in M$ fijo). $L : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(q, \tau) &:= L_{(p,0)}^h(q, \tau) \\ &= \inf \{ \mathcal{L}(\gamma) / \gamma : [0, \tau] \rightarrow M \text{ con } \gamma(0) = p \text{ y } \gamma(\tau) = q \}. \end{aligned}$$

Motivación “rigurosa” (Perelman)

- Métrica e-t en dim potencialmente infinita:

Dado $N \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{M} = M^n \times S^N \times (0, T) \quad \tilde{h} = h + \tau\sigma + \left(\frac{N}{2\tau} + R_h\right) d\tau^2,$$

donde $\sigma \in \mathfrak{M}(S^N) / \text{Sec}(\sigma) = (2N)^{-1}$.

★ Tomar $N / \frac{N}{2\tau} + R_h > 0 \Rightarrow \tilde{h} \in \mathfrak{M}(\widetilde{M})$.

★ Propiedades de $\tilde{h}$: $\begin{cases} \text{Una geodésica } \tilde{h}\text{-minimal debe minimizar } \mathcal{L}_h. \\ |\widetilde{\text{Ric}}|_{\tilde{h}} = O(N^{-1}). \end{cases}$

Motivación para el volumen reducido

Sea $p = (x_0, y_0, 0)$, $\bar{\tau} \in (0, T)$, $\partial B_{\tilde{h}}(p, r = \sqrt{2N\bar{\tau}}) \subset \widetilde{M}$

$$\underbrace{\frac{\text{Vol}(\partial B_{\tilde{h}}(p, r))}{\text{Vol}(\partial B_{\mathbb{R}^{n+N+1}}(\bar{p}, r))}}_{\searrow \text{ en } r = \sqrt{2N\bar{\tau}}} \approx CN^{-n/2} \underbrace{\int_M \bar{\tau}^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sqrt{\bar{\tau}}L(q, \bar{\tau})}} dV_{h(\bar{\tau})}(q)}_{\tilde{V}(\bar{\tau}) \searrow \text{ en } \bar{\tau}}$$

- **Objetivo:** demostración de la monotonía del volumen reducido.
- **Estrategia:** (1) Escribir $\tilde{V}(\tau)$ como una integral sobre $T_p M$

$$\tilde{V}(\tau) = \int_{T_p M} \tau^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sqrt{\tau}}L(*, \tau)} J(*, \tau) \chi_\tau dx.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \tilde{V}(\tau) \searrow \text{ en } \tau &\Leftrightarrow \tau^{-n/2} e^{-\ell(*, \tau)} J(*, \tau) \searrow \text{ en } \tau \\ &\Leftrightarrow -\frac{n}{2} \ln \tau - \ell(*, \tau) + \ln J(*, \tau) \searrow \text{ en } \tau \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ -geodésicas

- Fórmula de la primera variación:

$$\delta_Y \mathcal{L} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{L}_h(\alpha_s) = (2\sqrt{\tau} \langle X, Y \rangle) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tau} \left\langle Y, \nabla R - 2\nabla_X X - 4\text{Ric}(X, \cdot) - \frac{1}{\tau} X \right\rangle d\tau,$$

- $\mathcal{L}$ -geodésica: curva punto crítico del funcional $\mathcal{L}$.
- Ecuación de las $\mathcal{L}$ -geodésicas:

$$\nabla_X X - \frac{1}{2} \nabla R + \frac{1}{2\tau} X + 2\text{Ric}(X, \cdot)^\sharp = 0$$

- La definición de $\mathcal{L}$ -geodésica **se extiende a $\tau_1 = 0$** .
- **Vector inicial** de una $\mathcal{L}$ -geodésica $\gamma : [0, \bar{\tau}] \rightarrow M$ es

$$v := \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\tau} \gamma'(\tau) \in T_p M$$

$\mathcal{L}$ -geodésicas

- Teorema de existencia de $\mathcal{L}$ -geodésicas

$$\forall v \in T_p M \quad \exists! \mathcal{L}\text{-geodésica} \quad \gamma : [0, \bar{\tau}] \rightarrow M / \begin{cases} \gamma(0) = p \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\tau} \gamma'(\tau) = v \end{cases}$$

★ **Notación:** $\gamma \equiv \gamma_v$.

- Teorema de existencia de $\mathcal{L}$ -geodésicas minimales

$$\forall p, q \in M \quad \exists \text{ una } \mathcal{L}\text{-geodésica} \quad \gamma : [0, \bar{\tau}] \rightarrow M / \begin{cases} \gamma(0) = p \\ \gamma(\bar{\tau}) = q \end{cases} \text{ y} \\ \mathcal{L}(\gamma) = L(q, \bar{\tau}).$$

- Las $\mathcal{L}$ -geodésicas “cortas” son minimales

$$\forall v \in T_p M \quad \exists \tau_v > 0 / \gamma_v|_{[0, \tau_v]} \text{ es una } \mathcal{L}\text{-geodésica minimal.}$$

L-distancia: gradiente y derivada temporal

- Gradiente de L:

$$(\nabla L)_{(q, \bar{\tau})} = 2\sqrt{\bar{\tau}}X(\bar{\tau}),$$

siendo $X = \gamma'$, con γ $\mathcal{L}$ -geodésica minimal uniendo p y q .

- Derivada temporal de L:

$$\frac{\partial L}{\partial \tau}(q, \bar{\tau}) = 2\sqrt{\bar{\tau}}R - \frac{1}{2\bar{\tau}}L(q, \bar{\tau}) + \frac{1}{\bar{\tau}}K,$$

donde

$$K \equiv K(\gamma, \bar{\tau}) := \int_0^{\bar{\tau}} u^{3/2} H_u(X) du,$$

$$\left[\begin{array}{l} H_\tau(X) := -\frac{\partial R}{\partial \tau} - \frac{R}{\tau} - 2\langle X, \nabla R \rangle + 2\text{Ric}(X, X). \\ \text{expresión traza de la desigualdad de Harnack con } \begin{array}{l} t = -\tau \\ X \leftrightarrow -X \end{array} \end{array} \right]$$

Geometría de comparación para L

- Teorema de comparación del hessiano para L

Fijado $\bar{\tau} > 0$,

$$(\text{Hess}_{(q, \bar{\tau})} L)(Y, Y) \leq \frac{1}{\sqrt{\bar{\tau}}} - 2\sqrt{\bar{\tau}}\text{Ric}(Y, Y) - \int_0^{\bar{\tau}} \sqrt{\tau} H_\tau(X, \tilde{Y}) d\tau,$$

donde $Y = Y(\bar{\tau}) \in T_q M$,

$\tilde{Y}$ extensión adecuada de Y a lo largo de γ / $|\tilde{Y}(\tau)|^2 = \tau/\bar{\tau}$

$$\begin{aligned} H_\tau(X, \tilde{Y}) := & -\nabla^2 R(\tilde{Y}, \tilde{Y}) + 2R(X, \tilde{Y}, X, \tilde{Y}) - 4 \left[(\nabla_X \text{Ric})(\tilde{Y}, \tilde{Y}) - (\nabla_{\tilde{Y}} \text{Ric})(\tilde{Y}, X) \right] \\ & - 2 \frac{\partial \text{Ric}}{\partial \tau}(\tilde{Y}, \tilde{Y}) + 2|\text{Ric}(\tilde{Y}, \cdot)|^2 - \frac{1}{\tau} \text{Ric}(\tilde{Y}, \tilde{Y}) \end{aligned}$$

expresión matricial de Harnack

$$\boxed{=} \Leftrightarrow \tilde{Y}(\tau), \tau \in [0, \bar{\tau}], \text{ campo de } \mathcal{L}\text{-Jacobi (a lo largo de } \gamma).$$

- Teorema de comparación del laplaciano para L

$$\Delta L(q, \bar{\tau}) \leq -2\sqrt{\bar{\tau}}R + \frac{n}{\sqrt{\bar{\tau}}} - \frac{1}{\bar{\tau}}K$$

Distancia reducida

- Distancia reducida (a $p \in M$ fijo): $\ell(q, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}L(q, \tau)$

- Desigualdades para L y ℓ :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \tau} = 2\sqrt{\tau}R - \frac{L}{2\tau} + \frac{K}{\tau} \\ |\nabla L|^2 = -4\tau R + \frac{2}{\sqrt{\tau}}L - \frac{4}{\sqrt{\tau}}K \\ \Delta L \leq -2\sqrt{\tau}R + \frac{n}{\sqrt{\tau}} - \frac{K}{\tau} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \ell}{\partial \tau} = R - \frac{\ell}{\tau} + \frac{K}{2\tau^{3/2}} \\ |\nabla \ell|^2 = -R + \frac{\ell}{\tau} - \frac{K}{\tau^{3/2}} \\ \Delta \ell \leq -R + \frac{n}{2\tau} - \frac{K}{2\tau^{3/2}} \end{array} \right|$$

- Consecuencias:

(1) Estimación: $\min_M \ell(\cdot, \tau) \leq \frac{n}{2}$ para todo τ .

(2) M compacta $\Rightarrow \tilde{V}(\tau) \searrow$ en τ .

Ejemplo: $(\mathbb{R}^n, g_0)$

- $\mathcal{L}$ -longitud: $\sigma = 2\sqrt{\tau}$

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{\bar{\tau}} \sqrt{\tau} |\gamma'(\tau)|_{g_0}^2 d\tau = \int_0^{2\sqrt{\bar{\tau}}} |\beta'(\sigma)|_{g_0}^2 d\sigma = E_{g_0}(\beta)$$

- L-distancia:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(p, q)}{2\sqrt{\bar{\tau}}} &= \min\{E_{g_0}(\beta) / \beta : [0, 2\sqrt{\bar{\tau}}] \rightarrow M \text{ con } \beta(0) = p, \beta(2\sqrt{\bar{\tau}}) = q\} \\ &= \min\{\mathcal{L}(\gamma) / \gamma : [0, \bar{\tau}] \rightarrow M \text{ con } \gamma(0) = p, \gamma(\bar{\tau}) = q\} \\ &= L(q, \bar{\tau}) \end{aligned}$$

- Distancia reducida:

$$\ell(q, \bar{\tau}) = \frac{d^2(p, q)}{4\bar{\tau}}$$

Volumen reducido

- Volumen reducido:

$$\begin{aligned} \tilde{V} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tau &\longmapsto \tilde{V}(\tau) := \int_M \tau^{-n/2} e^{-\ell(q, \tau)} dV_\tau(q), \end{aligned}$$

donde $\begin{cases} dV_\tau = \text{elemento de volumen asociado a } h(\tau) \\ h(\tau) \text{ FR retrógrado} \end{cases}$

- Propiedad fundamental: $\tilde{V}(\tau) \searrow$ en τ .

- Objetivos:

- ★ $\tilde{V}$ está bien definido para M no compacta.
- ★ Demostrar la monotonía en el caso no compacto.

- Cuestión técnica pendiente: dar sentido al cambio de variable para expresar $\tilde{V}$ como $\int_{T_n M}$.

La aplicación $\mathcal{L}$ -exponencial

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \exp_{p, \bar{\tau}} : T_p M &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \gamma_v(\bar{\tau}), \quad \text{donde } \gamma_v \text{ es la } \mathcal{L}\text{-geodésica con} \\ &\quad \gamma_v(0) = p \text{ y } \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\tau} \gamma'(\tau) = v \end{aligned}$$

- $\mathcal{L}$ -Jacobiano $J(v, \tau)$: Jacobiano asociado a la $\mathcal{L}$ -exponencial.

$$\begin{aligned} J(v, \tau) &= \det(\mathcal{L} \exp_\tau)_* v \\ &= \sqrt{\det \langle J_i(\tau), J_j(\tau) \rangle_{h(\tau)}}, \end{aligned}$$

donde $\begin{cases} \{J_i(\tau)\}_{i=1}^n \text{ base de } \mathcal{L}\mathcal{J}(\gamma_v), \\ J_i(\tau) := (\mathcal{L} \exp_\tau)_* v(E_i), \quad \{E_i\}_{i=1}^n \text{ base de } T_p M \text{ } h(0)\text{-on.} \end{cases}$

★ Estimación para $\ln J(v, \tau)$: $\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=\bar{\tau}} \ln \mathcal{J}(v, \tau) \leq \frac{n}{2\bar{\tau}} - \frac{1}{2} \bar{\tau}^{-3/2} K$.

$\mathcal{L}$ -cut locus

- $\begin{cases} \gamma_v \text{ } \mathcal{L}\text{-minimal, o bien} \\ \exists \text{ un primer } \tau_v > 0 \text{ a partir del cual } \gamma_v \text{ ya no minimiza } \mathcal{L}. \end{cases}$

- $\Omega(\bar{\tau}) = \Omega_{(p,0)}(\bar{\tau}) = \{v \in T_p M / \gamma_v|_{[0, \bar{\tau}]} \text{ es minimal}\}$

★ $\begin{cases} \bullet \tau_1 < \tau_2 \Rightarrow \Omega(\tau_2) \subset \Omega(\tau_1). \\ \bullet \mathcal{L} \exp_{\bar{\tau}} : \Omega(\bar{\tau}) \longrightarrow \mathcal{L} \exp_{\bar{\tau}}(\Omega(\bar{\tau})) \text{ difeomorfismo,} \end{cases}$

donde $\mathcal{L} \exp_{\bar{\tau}}(\Omega(\bar{\tau})) = M \setminus \mathcal{L} \text{Cut}(\bar{\tau})$.

- Propiedades de $\mathcal{L} \text{Cut}(\bar{\tau})$ (= $\mathcal{L}$ -cut locus de $(p, 0)$ en tiempo $\bar{\tau}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \text{Cut}(\bar{\tau}) &\subset \{q \in M / q = \gamma_1(\bar{\tau}) = \gamma_2(\bar{\tau}), \gamma_1 \neq \gamma_2 \text{ } \mathcal{L}\text{-geodésicas minimales}\} \\ &\cup \{q \in M / q = \gamma_v(\bar{\tau}), \text{ donde } v \in T_p M \text{ punto crítico de } \mathcal{L} \exp_{\bar{\tau}}\} \end{aligned}$$

- ★ $\mathcal{L} \text{Cut}(\bar{\tau})$ tiene **medida nula** en $(M, h(\bar{\tau}))$.
- ★ Si $q \notin \mathcal{L} \text{Cut}(\bar{\tau}) \Rightarrow L$ y ℓ son C^2 -dif. en $(q, \bar{\tau})$.

Ejemplo: $(\mathbb{R}^n, g_0)$

• **L-distancia:** $L(q, \bar{\tau}) = \frac{d^2(p, q)}{2\sqrt{\bar{\tau}}}$

• **$\mathcal{L}$ -Jacobiano:** $\mathcal{L} \exp_{p, \bar{\tau}} : T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
 $v \longmapsto \gamma_v(\bar{\tau}) = p + 2\sqrt{\bar{\tau}}v$

$$\begin{aligned} J(v, \bar{\tau}) &= \det (\mathcal{L} \exp_{\tau})_{*v} = \det \left(\frac{\partial (\mathcal{L} \exp_{p, \bar{\tau}}(v))^i}{\partial v^j} \right) \\ &= \det \left(2\sqrt{\bar{\tau}} \frac{\partial v^i}{\partial v^j} \right) \\ &= 2^n \bar{\tau}^{n/2} \end{aligned}$$

Concepto de κ -no colapso

• **Notación:** $\star g(\cdot)$ RF en $M^n \times [0, T)$, $T \leq \infty$. $\star \kappa, \rho > 0$

$\star$ **Entorno parabólico** centrado en (x_0, t_0) :

$$P(x_0, t_0, r) = B_{t_0}(x_0, r) \times [\max\{t_0 - r^2, 0\}, t_0]$$

• $g(\cdot)$ es κ -no colapsado a escala ρ si $\forall (x_0, t_0) \in M \times [0, T)$ y $\forall r < \rho$,

$$|Rm|(x, t) \leq r^{-2} \quad \forall (x, t) \in P(x_0, t_0, r) \Rightarrow \frac{\text{Vol}_{t_0}(B_{t_0}(p, r))}{r^n} \geq \kappa.$$

• $g(\cdot)$ κ -no colapsado a toda escala si es κ -no colapsado a escala ρ , $\forall \rho < \infty$

Ejemplos de κ -no colapso

- $(S^1 \times \mathbb{R}, g_0)$
 - $\star \forall \rho \exists \kappa(\rho) / g_0$ es $\kappa(\rho)$ -no colapsada en la escala ρ .
 - $\star \nexists$ ningún κ / g_0 sea κ -no colapsado para toda escala.
- $(S^2 \times \mathbb{R}, (1 - 4t)\sigma + dt^2)$: κ -no colapsado para toda escala.
- Idem para $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ ($n \geq 4$) y S^{n-1} ($n \geq 3$)

Teorema de no-colapso local

- **Teorema de no-colapso local:** $g(\cdot)$ RF en $M^n \times [0, T)$.
 $\left. \begin{array}{l} M \text{ compacta} \\ T < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \rho > 0, \exists \kappa = \kappa(g_0, T, \rho) > 0 /$
 $g(\cdot)$ es κ -no colapsado a escala ρ .

Modelos singulares

• **Modelo singular:** $(M_\infty, g_\infty(\cdot), x_\infty)$ FR obtenido como límite de una sucesión de dilataciones de una sol singular:

$$(M^n, g_t) \quad \text{RF} \quad \text{en} \quad [0, T) \quad \text{con} \quad T < \infty.$$

i.e.

$$(M_\infty, g_\infty(\cdot), x_\infty) := \lim_{i \rightarrow \infty}^{\text{Ch-G}} (M_i, g_i(\cdot), x_i) \quad (\text{si existe})$$

donde $\{(M_i, g_i(\cdot), x_i)\}$ suc. de dilataciones parabólicas:

$$g_i(t) := Q_i g(t_i + t/Q_i)$$

con $\{(x_i, t_i) \in M^n \times [0, T) : t_i \rightarrow T\} / Q_i := |Rm(x_i, t_i)| \rightarrow \infty$

$\star$ **Hipótesis extra (HE):**

$$\exists C < \infty / |Rm| \leq CQ_i \quad \text{en} \quad M \times [0, t_i].$$

Propiedades básicas

(1) Propiedad de reescalamiento del κ -no colapso

$$g(\cdot) \begin{array}{l} \kappa\text{-no colapsado} \\ \text{a escala } \rho \end{array} \left| \Rightarrow \forall \alpha > 0 \quad \alpha g(\cdot) \begin{array}{l} \kappa\text{-no colapsado} \\ \text{a escala } \sqrt{\alpha}\rho \end{array} \right.$$

(2) κ -no colapso se preserva por límites de Cheeger-Gromov con punto

$$\begin{array}{c} \{(M_i^n, g_i(\cdot), x_i)\} / \begin{array}{l} g_i \text{ es } \kappa\text{-no colapsado a escala } \rho \ \forall i, \\ \text{para algún } \kappa \in (0, \infty) \text{ y } \rho \in (0, \infty] \end{array} \\ \Downarrow \\ (M_\infty, g_\infty(\cdot), x_\infty) := \lim_{i \rightarrow \infty}^{\text{Ch-G}} (M_i, g_i(\cdot), x_i) \text{ es } \kappa\text{-no colapsado a escala } \rho \end{array}$$

Estudio de los modelos singulares

(1) Modelos singulares y no-colapso

$\exists \kappa > 0 / (M_\infty, g_\infty(\cdot), x_\infty)$ (**si existe**) es κ -no colapsado a cualquier escala.

$$\text{Sup} \quad \boxed{\text{(HE)} \quad \exists C < \infty \ / \ |Rm| \leq CQ_i \quad \text{en} \quad M \times [0, t_i].}$$

(2) Minoración del radio de inyectividad

$$\exists A \equiv A(C, n, g_0) / \text{inj}_{g_i(0)}(x_i) \geq A.$$

(3) Existencia de modelos singulares

$$\{(M, g_i(t), x_i)\} \text{ subconverge a } (M_\infty, g_\infty(t), x_\infty)$$

RF completo, con $t \in (-\infty, 0]$ y siendo M_∞ variedad posib. no compacta y topológicamente $\neq$, con $|Rm|_\infty \leq C$.

Eliminación de posibles modelos singulares

• **Corolario 1.** $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ no puede aparecer como modelo singular. Lo mismo pasa con (Σ, g) .

• **Corolario 2.** [Ilmanen-Knopf, 2003] Sea h_t RF estándar para S^2 . Ningún cociente compacto de $(S^2 \times \mathbb{R}, h_t + dr^2)$, se puede obtener como modelo singular de un RF 3-dim.

★ $S^1 \times S^2$ y $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ no pueden aparecer como modelos singulares.

Teorema del entorno canónico

o

Tma de estructura local de las singularidades

Definiciones previas

- $g(\cdot)$ RF tiene **condiciones iniciales normalizadas (c.i.n.)** si
 - ★ está definido en $M \times [0, T)$, donde $\begin{cases} M \text{ compacta y} \\ 0 < T \leq \infty \text{ tiempo maximal} \end{cases}$
 - ★ $|Rm|_{g_0} \leq 1$.
 - ★ $Vol(B_{g_0}(x, 1)) \geq \frac{\omega_n}{2}$.
- **Entorno parabólico** centrado en (x_0, t_0) :

$$P(x_0, t_0, r) = B_{t_0}(x_0, r) \times [\max\{t_0 - r^2, 0\}, t_0]$$

Enunciado y observaciones

- **Enunciado (§12.1):** Dados $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ T < \infty \end{array} \right\}, \exists \left\{ \begin{array}{l} R_0 = R_0(\varepsilon, T) \\ \kappa = \kappa(T) \end{array} \right\} /$

$$\left(\begin{array}{l} (M^3, g(\cdot)) \text{ RF con c.i.n.} \\ \text{y } R(x, t) \geq R_0 \end{array} \right) \left| \rightarrow \begin{array}{l} \text{el flujo punteado } (M, g(\cdot), (x, t)) \\ \text{tras un reescal. parabólico por } R(x, t), \\ \text{está } \varepsilon\text{-próximo a una } \kappa\text{-solución punteada.} \end{array} \right.$$
- **Observaciones:**
 - ★ Afirmación local.
 - ★ Aplicable al análisis de las singularidades.
 - ★ Cerca de (x, t) podemos aplicar los resultados sobre κ -soluciones.
 - ★ §12.1 se cumple para $\varepsilon \Rightarrow$ §12.1 se cumple para $\varepsilon' > \varepsilon$.

Sobre las κ -soluciones

- **Oscilaciones de R :** $\exists \eta < \infty /$

$$\left| \frac{\partial R}{\partial t} \right| \leq \eta R^2 \quad \text{y} \quad |\nabla R| \leq \eta R^{3/2}$$

- **Entornos canónicos:**

$\forall \varepsilon > 0$ suf. pequeño, $\exists C(\varepsilon) > 0$ pequeño t.q. todo punto (x, t) en una κ -solución admite un entorno B con $\text{diam} < C(\varepsilon)R(x, t)^{-1/2} /$

- (a) B ε -cuello
- (b) B ε -gorro.
- (c) B var compacta $\text{Sec} > 0$.

Demostración de §12.1

- Sup. §12.1 es falso para algún $t \leq t_{max}$, donde $\kappa = \kappa(t_{max})$ es la constante de no colapso.
- Sup. $\exists \varepsilon > 0$ y $\exists \{(M, g_i(\cdot), (x_i, t_i))\}$ suc. RF's 3-dim. punteados con c.i.n. /
 - ★ $t_i \leq t_{max}$
 - ★ $Q_i = R(x_i, t_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$
 - ★ Tras reescalar por $R(x_i, t_i)$ ninguno de los RF's resultantes $(M_i, h_i(\cdot), (x_i, 0))$ está ε -próximo a una κ -solución.
- **Objetivo:** Dem. que $(M_i, h_i(\cdot), (x_i, 0))$ subconverge a una κ -solución.

Etapas de la dem de §12.1

- **Paso 1. Selección puntual.** Encontrar $\{(\hat{x}_i, \hat{t}_i)\}$ /

$$Q_i = R(\hat{x}_i, \hat{t}_i) \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad (\hat{x}_i, \hat{t}_i) \text{ no cumple §12.1, pero}$$

$$\forall (y, t) \in P(\hat{x}_i, \hat{t}_i, D_i Q_i^{-1/2}) \begin{cases} R(y, t) < 2Q_i \\ R(y, t) \geq 2Q_i \text{ y §12.1 se cumple para } (y, t) \end{cases}$$

- $(M_i, h_i(\cdot), (x_i, 0))$ RF reescalado por Q_i . [$(x_i, t_i) := (\hat{x}_i, \hat{t}_i)$]

- **Paso 2.** $(M_i, h_i(0), (x_i, 0))$ tienen **curvatura unif acotada a distancias acotadas**:

$$\forall \rho < \infty \quad \exists Q = Q(\rho) < \infty \quad / \quad R \leq Q \quad \text{en } B(x_i, 0, \rho).$$

- **Paso 3.** El lím $(M_\infty, h_\infty(0), (x_\infty, 0)) \exists$ y $Rm_{M_\infty} \leq C$.

- **Paso 4.** $\exists$ un RF límite $(M_\infty, h_\infty(\cdot), (x_\infty, 0))$ κ -solución.

Paso 1 (dem §12.1) : Selección puntual

- Tomar $P(x_i, t_i, D_i Q_i^{-1/2}) =: \mathbb{P}_i$ con $D_i \rightarrow \infty$ / $D_i Q_i^{-1/2} \leq 1/10$.

- Para cada i fijo, puede suceder

$$(1) \quad R(y, t) < 2Q_i \quad \forall (y, t) \in \mathbb{P}_i$$

$$(2) \quad \forall (y, t) \in \mathbb{P}_i \quad / \quad R(y, t) \geq 2Q_i, \text{ se cumple §12.1}$$

$$(3) \quad \exists (y, t) \in \mathbb{P}_i \quad / \quad R(y, t) \geq 2Q_i, \text{ pero no se cumple §12.1}$$

★ Si (1) ó (2) $\Rightarrow (\hat{x}_i, \hat{t}_i) := (x_i, t_i)$.

★ Si (3):

$$\left[\begin{array}{l} (x_i, t_i) \Leftrightarrow (y, t) \\ \mathbb{P}_i \Leftrightarrow P(y, t, D_i R(y, t)^{-1/2} / \sqrt{2}) \end{array} \right] \text{ y repetir el proceso.}$$

Paso 1 (dem §12.1) : Selección puntual

- $(x_i, t_i) := (\hat{x}_i, \hat{t}_i)$ no cumple §12.1, pero $\forall (y, t) \in P(x_i, t_i, D_i Q_i^{-1/2})$

$$(C1) \quad \begin{cases} R(y, t) < 2Q_i, \text{ o bien} \\ (y, t) \in \mathcal{G}_i \end{cases},$$

donde $\mathcal{G}_i := \{(y, t) \mid R(y, t) \geq 2Q_i \text{ y §12.1 se cumple para } (y, t)\}$.

$$(C2) \quad \exists P(y, t, r) \text{ con } r \sim (Q_i + |R(y, t)|)^{-1/2} \text{ donde}$$

$$R \lesssim Q_i + |R(y, t)|$$

- **Consecuencia:** $\exists \eta < \infty$ (constante) / $\forall (y, t) \in \mathcal{G}_i$ se tiene

$$\left| \frac{\partial R}{\partial t} \right| \leq \eta R^2 \quad \text{y} \quad |\nabla R| \leq \eta R^{3/2} \quad (1)$$

Paso 1 (dem §12.1) : Selección puntual

- $(x_i, t_i) := (\hat{x}_i, \hat{t}_i)$ no cumple §12.1, pero $\forall (y, t) \in P(x_i, t_i, D_i Q_i^{-1/2})$

$$(C1) \quad \begin{cases} R(y, t) < 2Q_i, \text{ o bien} \\ (y, t) \in \mathcal{G}_i \end{cases},$$

donde $\mathcal{G}_i := \{(y, t) \mid R(y, t) \geq 2Q_i \text{ y §12.1 se cumple para } (y, t)\}$.

$$(C2) \quad \exists P(y, t, r) \text{ con } r \sim (Q_i + |R(y, t)|)^{-1/2} \text{ donde}$$

$$R \lesssim Q_i + |R(y, t)|$$

- **Dilatación (de factor Q_i):** $\{(M_i, h_i(\cdot), (x_i, 0))\}$ sucesión de RF's / $R(x_i, 0) = 1$.

Paso 2 (dem §12.1): Hipótesis de partida

- **Objetivo:** $\forall \rho < \infty \exists Q = Q(\rho) < \infty$ constante /

$$R \leq Q \quad \text{en } y \in B(x_i, 0, \rho) \subset (M_i, h_i(0), (x_i, 0)).$$

- ★ $\forall \rho > 0$ definimos

$$Q = Q(\rho) := \sup_i \sup \{R(y, 0) / y \in B(x_i, 0, \rho)\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

- ★ Ponemos $\rho_0 := \sup\{\rho / Q(\rho) < \infty\}$.

- **Buscamos** probar $\rho_0 = \infty$.

- **Suponemos** $\begin{cases} \star \rho_0 < \infty \text{ y} \\ \star \lim_{i \rightarrow \infty} \sup \{R(y, 0) / (y, 0) \in B(x_i, 0, \rho_0)\} = \infty. \end{cases}$

(2.1) $\exists$ un RF lím. incompleto $(M_\infty, h_\infty(\cdot), (x_\infty, 0))$.

Paso 2 (§12.1): propiedades de $(M_\infty, h_\infty(\cdot), (x_\infty, 0))$

- $R(x_\infty, 0) = 1$.
- Por Ham-Ivey pinching: $Rm_\infty \geq 0$.
- $\sup\{R(y, 0) : (y, 0) \in B(x_\infty, 0, \rho_0)\} = \infty$.
- Definido en $B(x_\infty, 0, \rho_0)$
- $\forall (y, 0) \in B(x_\infty, 0, \rho_0)$

(C1) Si $R(y, 0) \geq 2$, al reescalar por $R(y, 0)$, se obtiene un RF 2ε -próximo a una κ -solución.

(C2) $\exists P(y, 0, r)$ con $r \sim (1 + |R(y, 0)|)^{-1/2}$ donde

$$R \lesssim 1 + |R(y, 0)|$$

Demostración de §12.1 (Paso 2)

(2.2) $(M_\infty, h_\infty(0), (x_\infty, 0))$ contiene una región difeo a $S^2 \times [0, 1)$ con $R \rightarrow \infty$ en el extremo $S^2 \times \{1\}$.

Todo punto suf. próximo al extremo es el centro de un 2ε -cuello.

Dem. Tomamos una geodésica minimal

$$\gamma : [0, 1) \longrightarrow (M_\infty, h_\infty(0)) / \quad R(\gamma(s), 0) \xrightarrow{s \rightarrow 1} \infty$$

- ★ $\exists s_0 \in (0, 1) / \forall s \in [s_0, 1) \quad R(\gamma(s), 0) \geq 2$

$\xrightarrow{\text{Paso 1}}$ tras reescalar por $R(\gamma(s), 0)$, el punto $(\gamma(s), 0)$ con $s \in [s_0, 1)$

$$\text{tiene un entorno que es } \begin{cases} 2\varepsilon\text{-cuello,} \\ 2\varepsilon\text{-gorro,} \\ \cong S^3/\Gamma \end{cases}$$

- ★ $\exists s_1 \in [s_0, 1) / \forall s \in [s_1, 1)$ el punto $(\gamma(s), 0)$ es el centro de un 2ε -cuello.

Demostración de §12.1 (Paso 2)

(2.3) Consideramos la completación del e.m.

$$(M_\infty, d_{h_\infty(0)}) / \exists y_\infty := \lim_{s \rightarrow 1} (\gamma(s), 0)$$

Sea $\gamma_1 = \gamma|_{[s_1, 1)}$ y

$$U = \cup_{q \in \gamma_1} B(q, cR(q)^{-1/2}) \subset (M_\infty, h_\infty(0))$$

- **Propiedades:**

(a) $\bar{U} = U \cup \{y_\infty\}$ espacio de Alexandrov de curvatura ≥ 0 .

(b) y_∞ no puede ser punto interior de ninguna geodésica minimal.

(c) $\exists C_{y_\infty} \bar{U}$ cono métrico 3-dim de curvatura ≥ 0 sobre una 2-esfera métrica.

Demostración de §12.1 (Paso 2)

(2.4) Tomamos $s_k \rightarrow 1$ y reescalamos los RF's $(M_\infty, h_\infty(\cdot), (\gamma(s_k), 0))$ por $R(\gamma(s_k), 0)$.

$\Rightarrow$ obtenemos una suc. de RF's loc. definidos / subconvergen a un RF loc. definido

(a) $Rm \geq 0$

(b) En $t = 0$ es loc. isométrico a un cono Riemanniano (sobre S^2).

• Veamos que (b) lleva a una $\sharp$ con (a):

★ Denotamos (M_0, g_0) la hoja temporal 0 en el RF límite.

★ Tomamos $\{e_1, e_2, e_3\}$ base g_0 -ortonormal para $T_p M_0$ /

$$\text{Sec}(e_1, e_i) = 0, \quad i = 2, 3; \quad \text{Sec}(e_2, e_3) > 0$$

★ **Objetivo:** Dem. que $\langle \partial_t Rm(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle > 0$ en $t = 0$

Demostración de §12.1 (Paso 3)

• **Objetivo:** $\exists (M_\infty, h_\infty(0), (x_\infty, 0))$ var. C^∞ con curvatura globalmente acotada.

★ Por el paso 2: $R(y, 0) \leq \mathcal{Q}(d(y, x_i)) \quad \forall y \in (M, h_i(0), x_i)$

$\xrightarrow[\text{previo}]{\text{lema}}$ $R \leq \mathcal{Q}$ en un entorno parabólico.

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow[\text{de Shi}]{\text{estimaciones}} & \text{acotación de las derivadas de la curvatura} & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (M_i, h_i(0), x_i) \text{ converge a} \\ (M_\infty, h_\infty(0), x_\infty) \text{ var. } C^\infty / \\ Rm_{M_\infty} \geq 0 (\text{Ham-Ivey}) \\ inj_{M_\infty} \geq a > 0 (\kappa\text{-no colapso}) \end{array} \right. \end{array}$$

★ Además, M_∞ tiene curvatura acotada globalmente.

Sup. NO $\xrightarrow{\text{Paso 2}}$ $\exists$ una colección de cilindros $S^2 \times I$ / el radio de S^2 tiende a 0

$\xrightarrow[\text{Sharafutdinov}]{\text{tma. retracción}}$ eso es imposible.

Demostración de §12.1 (Paso 4)

• Sup. $(t', 0]$ intervalo maximal en que se puede aplicar el tma. de compacidad para obtener: $(M_\infty, h_\infty(t), (x_\infty, 0))$ RF límite en $(t', 0]$.

• **Objetivo:** Probar $t' = -\infty$. Suponer t' finito.

★ **Resultado previo:** $\exists C / |d_0(\cdot, \cdot) - d_t(\cdot, \cdot)| \leq C, \forall t \in (t', 0]$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Resultado auxiliar:} \\ \text{Ric} \leq Kg \text{ para algún } K > 0 \end{array} \Rightarrow \frac{d}{dt} d_t(x_0, y_0) \geq -C(n)\sqrt{K} \right)$$

★ **Caso 1.** M_∞ compacta $\xrightarrow[\text{previo}]{\text{result.}}$ $diam_{h_t}(M_\infty)$ acotado en $(t', 0]$

$$\xrightarrow[\text{de máx}]{\text{principio}} R_{\min}(t) \leq R_{\min}(0), \quad \forall t \in (t', 0].$$

$$\left[\begin{array}{l} \rho := 2 \text{ diam}_{h_t} M_\infty \\ p \in M_t / R(p) \leq R_{\min}(0) \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Paso 2}} R \text{ unif. acotada en } M_\infty \times (t', 0] \\ \xrightarrow[\text{cerca de } t']{\text{razonando}} R \text{ acotada para } \bar{t} < t'.$$

Demostración de §12.1 (Paso 4)

★ **Caso 2.** M_∞ no compacta

Paso 1.- $\exists D > 0 / \text{si } y \in M_\infty \setminus B(x_\infty, D) \Rightarrow \exists x \in M_\infty /$

$$d_0(x_\infty, y) = d_0(x, y) \quad d_0(x_\infty, x) \geq \frac{3}{2} d_0(x_\infty, y) \quad (*)$$

(Clave: las variedades con curvatura ≥ 0 son asintóticamente cónicas).

$\xrightarrow[\text{previo}]{\text{result.}}$ $(*)$ se cumple para $d_{g(t)}$ (salvo un error $\pm C$) $\forall t \in (t', 0]$.

• Tomar $D \gg C$. **Sup** $\exists y \in M_\infty \setminus B(x_\infty, D) / R(y, t)$ no acotada.

$\xrightarrow[\text{puntual}]{\text{selección}} \exists U$ entorno de y próximo a una κ -solución.

$\rightarrow U$ región cilíndrica de diámetro $\sim R(y, t)^{-1/2}$.

$\xrightarrow[\text{curvatura} \geq 0]{\text{t}^a \text{ variedades}}$ U separa x_∞ de x

★ Esto último se contradice con que (M, g_0) tenga geom. controlada.

Recapitulando...

- Hemos obtenido:

- ★ $(M_\infty, h_\infty(t), (x_\infty, 0))$ RF límite definido en $(-\infty, 0]$.
- ★ $Rm_\infty \geq 0$ (Ham-Ivey).
- ★ completo (tma compacidad).
- ★ κ -no colapsado en toda escala.
- ★ Rm_∞ acotado en cada hoja temporal

- Abreviando,

$(M_\infty, h_\infty(t), (x_\infty, 0))$ es una κ -solución