

# Flujo de Ricci con cirugía en dim. 3

Granada, julio de 2007

# 1. Planteamiento

- Visión general del artículo:

*“Flujo de Ricci con cirugía en 3-variedades”*

- ★ Técnicamente difícil.
- ★ Usa las ideas del primer artículo.

- **Objetivo:** descomponer la variedad en el tiempo singular.
- **Técnica:** adaptación de la cirugía introducida por Hamilton para 4-variedades.
- **Tarea previa:** describir  $(M^3, g_t)$  cuando  $t \rightarrow T$ .

## 2. las 2 últimas diapositivas de $\kappa$ -soluciones

Toda solución antigua que es una  $\kappa$ -solución *para algún  $\kappa$*  es o una  $\kappa_0$ -solución o un cociente métrico de la esfera redonda  $S^3$ .

*Existe una constante universal  $\eta$  tal que en cada punto de una solución antigua que es una  $\kappa$ -solution para algún  $\kappa$ , tenemos las estimaciones*

$$|\nabla R| < \eta R^{\frac{3}{2}}, \quad \left| \frac{\partial R}{\partial t} \right| < \eta R^2. \quad (1)$$

## 2. las 2 últimas diapositivas de $\kappa$ -soluciones

### Teorema

*Para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño se puede encontrar  $C_1 = C_1(\epsilon)$  and  $C_2 = C_2(\epsilon)$  tales que para cada punto  $(x, t)$  en toda  $\kappa$ -solución existe un radio  $r \in [R(x, t)^{-1/2}, C_1 R(x, t)^{-1/2}]$  y un entorno  $B$ ,  $B(x, t, r) \subset B \subset B(x, t, 2r)$ , que cae en una de las siguientes clases:*

- (a)  $B$  es un  $\epsilon$ -cuello fuerte (con más precisión, la hoja de un  $\epsilon$ -cuello fuerte en su tiempo maximal), o*
- (b)  $B$  es un  $\epsilon$ -gorro, o*
- (c)  $B$  es una variedad cerrada difeomorfa a  $S^3$  o  $\mathbb{RP}^3$ , o*
- (d)  $B$  es una variedad cerrada de curvatura seccional positiva constante..*

*Además, la curvatura escalar en  $B$  en el tiempo  $t$  está entre  $C_2^{-1}R(x, t)$  y  $C_2R(x, t)$ , su volumen en los casos (a), (b) y (c) es mayor que  $C_2^{-1}R(x, t)^{-\frac{3}{2}}$ , y en el caso (c) la curvatura seccional en  $B$  en el tiempo  $t$  es mayor que  $C_2^{-1}R(x, t)$ .*

### 3. Situación de partida

- $g_t$  RF  $M^3 \times [0, T)$ , con  $T < \infty$  (tiempo singular).
- Sup. que  $g_0$  cumple condiciones iniciales normalizadas  $\xrightarrow{\S 12.1}$  fijado  $\varepsilon > 0$  pequeño,  $\exists r > 0$  / si  $R(x, t) \geq r^{-2} \Rightarrow (x, t)$  tiene un entorno que, tras reescalar, puede ser  $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\text{-cuello} \\ \varepsilon\text{-gorro} \\ \cong S^3/\Gamma \end{array} \right.$
- ★ Por las propiedades de las  $\kappa$ -soluciones,

$$\left| \frac{\partial R^{-1}}{\partial t}(x, t) \right| \leq \eta \quad |\nabla R^{-1/2}(x, t)| \leq \eta$$

- ★ Por el tma de no colapso:  $\exists \kappa = \kappa(g_0, \rho_0) > 0$  /  $g_t$  es no  $\kappa$ -colapsada en la escala  $\rho_0$ ,  $\forall t \in [0, T)$ .
- ★  $\forall t \in [0, T)$ ,  $g_t$  cumple la estimación pinching de Hamilton-Ivey, para alguna función  $\varphi$ .

## 4. Región de curvatura acotada

- Se define

$$\Omega := \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow T^-} R(x, t) < \infty\} \text{ level}=1 \neq M. \text{ level}=5$$

★ No necesariamente conexo. level=2

★ Abierto en  $M$ . level=3

★ En el 1<sup>er</sup> tiempo singular  $\nexists$  ninguna componente compacta. level=4

- **Caso 1.**  $\Omega = \emptyset$  level=6  $\Rightarrow$

$$M \in \{S^3/\Gamma, \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, S^2 \times S^1\} \text{ level}=7$$

★  $M$  simplemente conexa  $\Rightarrow M \cong S^3$ . level=8

- **Caso 2.**  $\Omega \neq \emptyset$ . level=9

★ Ponemos  $g_T := \lim_{t \rightarrow T^-} g_t|_{\Omega} \xrightarrow[\text{de Shi}]{\text{estimaciones}} g_T$  métrica dif. en  $\Omega$ . level=10

★  $\text{Vol}(\Omega, g_T) \leq \lim_{t \rightarrow T^-} \text{Vol}(M, g_t) < \infty$ . level=11

★  $g_T$   $\kappa$ -no-colapsada, cumple el  $\varphi$ -pinching y la hipótesis del entorno canónico. level=12

## 5. Región de geometría controlada

Fijamos algún  $0 < \rho < r$  y definimos

$$\Omega_\rho := \{x \in \Omega / R(x, t) \leq 1/\rho^2\}.$$

- **Caso 1.**  $\Omega_\rho = \emptyset \Rightarrow M \in \{S^3/\Gamma, \mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3, S^2 \times S^1\}.$
- **Caso 2.**  $\Omega_\rho \neq \emptyset.$ 
  - ★  $\rho = \delta r$ , para algún  $0 < \delta < 1$  a determinar.
  - ★  $\Omega_\rho$  es un subconjunto compacto de  $M$ .
  - ★ **Objetivo:** Describir la estructura de  $\Omega \setminus \Omega_\rho$ .

## 6. Región de curvatura elevada

### • Vocabulario básico:

- ★ Sea una métrica sobre  $S^2 \times (-1, 1)$  t.q. todo punto está en un  $\varepsilon$ -cuello. Se dice
  - $\varepsilon$ -tubo si  $R$  está acotada.
  - $\varepsilon$ -corneta si  $R \rightarrow \infty$  en un extremo.
  - doble  $\varepsilon$ -corneta si  $R \rightarrow \infty$  en ambos extremos.
  
- ★ Sea una métrica sobre  $B^3$  ó  $\mathbb{RP}^3 \setminus \bar{B}^3$  t.q. fuera de un conjunto compacto todo punto está en un  $\varepsilon$ -cuello. Se dice
  - $\varepsilon$ -gorro si  $R$  está acotada.
  - $\varepsilon$ -corneta con gorro si  $R \rightarrow \infty$  en un extremo.
- ★  $\varepsilon$ -circuito: variedad cerrada difeomorfa a  $S^2 \times S^1$ .

## 7. Región de curvatura elevada

- Estructura de  $\Omega \setminus \Omega_\rho$  (en el primer t. singular): todo punto en  $\Omega \setminus \Omega_\rho$  está contenido en:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\text{-cuello} \\ \varepsilon\text{-gorro} \\ \varepsilon\text{-corneta} \end{array} \right\} \text{ con borde en } \Omega_\rho.$$

$$(b) \text{ Componentes disjuntas de } \Omega_\rho \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\text{-cornetas con gorro} \\ \text{dobles } \varepsilon\text{-cornetas} \end{array} \right.$$

- Control sobre el número de cirugías (en cada instante):
  - ★ Posiblemente tiene un  $n^0$  infinito de componentes.
  - ★ Pero **siempre** hay un  $n^0$  finito del grupo (a) porque  $\supset$  cuellos de curvatura  $\rho^{-2}$ .

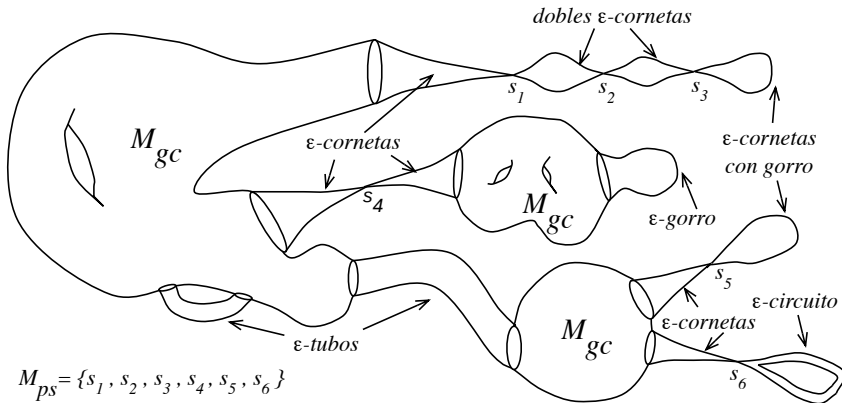
## 8. Proceso de cirugía

- Pretendemos responder a:
  - ★ ¿cómo prolongar el flujo más allá del tiempo singular?
  - ★ ¿se puede evitar la acumulación de los tiempos de cirugía?
- **Objetivo:** especificar cómo hacer la cirugía analíticamente.  
En concreto, dar una descripción métrica que permita reducir  $R$  y reiniciar el flujo.
- **Importante recordar:**
  - ★ Papel esencial de la descripción de  $(\Omega, g_T)$ .
  - ★ Cirugía a lo largo de esferas.

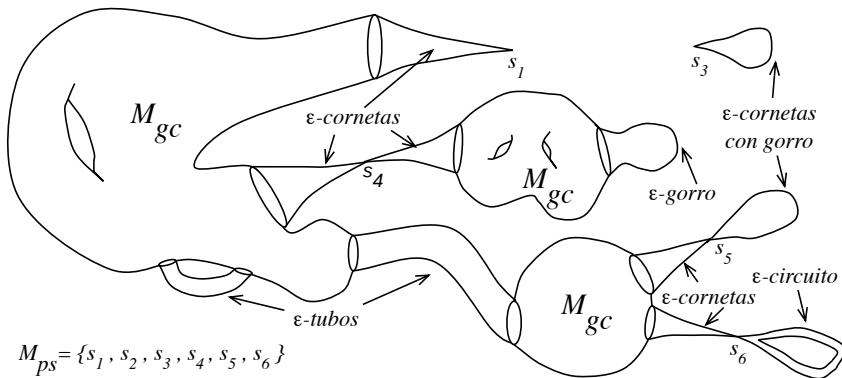
## 9. Descripción (topológica) de la cirugía

- (C1) Despreciar las componentes de  $\Omega$  disjuntas de  $\Omega_\rho$ .
- (C2) Cortar cada  $\varepsilon$ -corneta con borde en  $\Omega_\rho$  a lo largo de una  $S^2$  con  $R_{S^2} = h^{-2}$ .
- (C3) Despreciar la comp. de curvatura no acotada y pegar una 3-bola en la 2-esfera borde.
- (C4) Reiniciar el flujo tomando  $T$  como origen de tiempos.

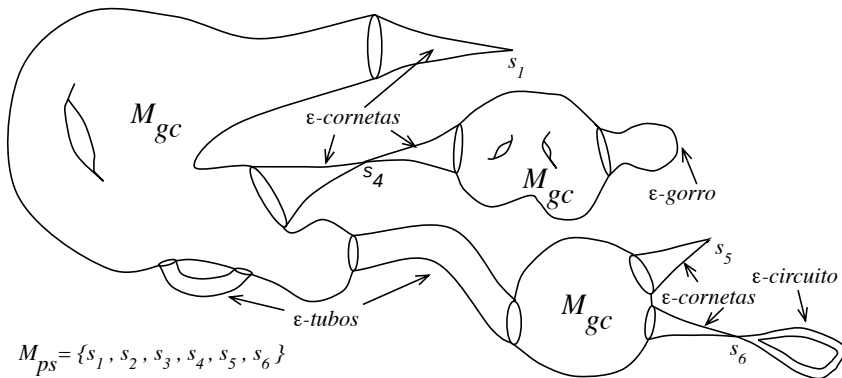
# 10. Fases del proceso de cirugía



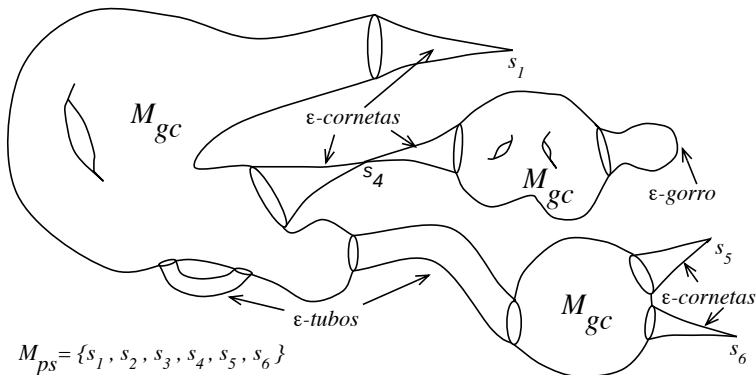
# 10. Fases del proceso de cirugía



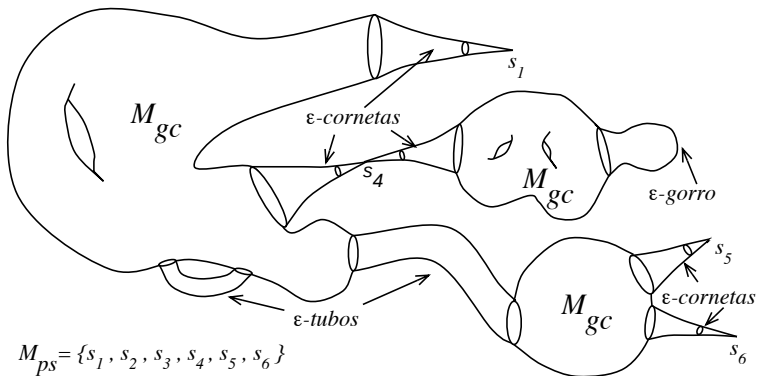
# 10. Fases del proceso de cirugía



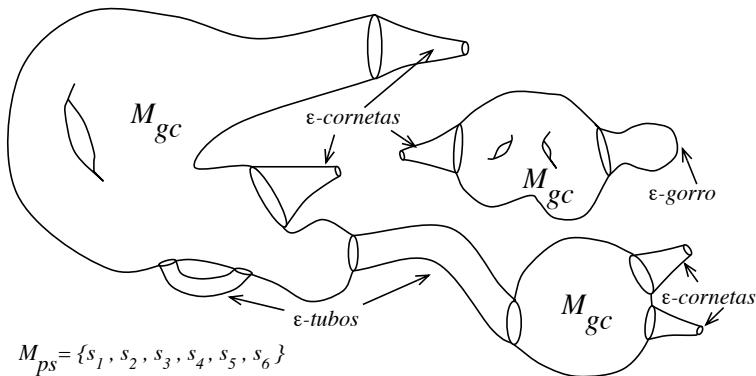
# 10. Fases del proceso de cirugía



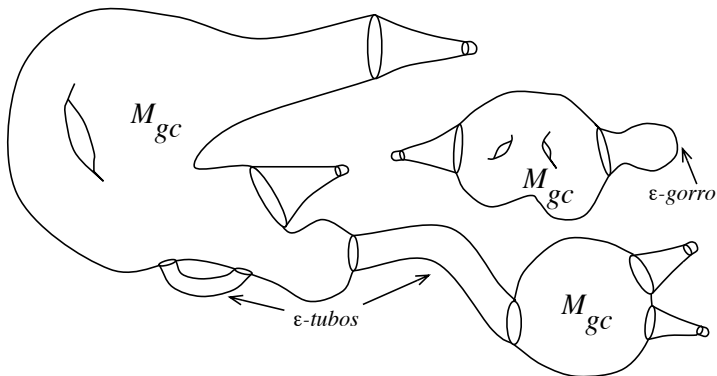
# 10. Fases del proceso de cirugía



# 10. Fases del proceso de cirugía



## 10. Fases del proceso de cirugía



# 11. Descripción (topológica) de la cirugía

(C1) Despreciar las componentes de  $\Omega$  disjuntas de  $\Omega_\rho$ .

(C2) Cortar cada  $\varepsilon$ -corneta con borde en  $\Omega_\rho$  a lo largo de una  $S^2$  con  $R_{S^2} = h^{-2}$ .

(C3) Despreciar la comp. de curvatura no acotada y pegar una 3-bola en la 2-esfera borde.

(C4) Reiniciar el flujo tomando  $T$  como origen de tiempos.

## • Tras la cirugía:

★  $M' \equiv$  unión de las componentes conexas resultantes de la cirugía.

★ Clave:  $M$  se puede reconstruir a partir de  $M'$  tomando  $\sharp$  de las componentes de  $M'$  (quizá con factores  $S^3/\Gamma$  ó  $S^1 \times S^2$  adicionales).

★ Consecuencia: Si se puede probar la Conjetura de Geometrización para  $M' \Rightarrow$  también se cumple para  $M$ .

## 12. Descripción (métrica) de la cirugía

- **Objetivo fundamental:**

Precisar **(C3)** para que se preserve  $\left\{ \begin{array}{l} \kappa\text{-no colapso} \\ \varphi\text{-pinching} \\ (r, \varepsilon)\text{-entorno canónico} \end{array} \right.$

- **Clave:** Definir la métrica en la 3-bola que se añade por interpolación de la métrica en el “gorro estándar”.

- **Estrategia de Perelman:** asegurar que se preservan las hipótesis a priori:

- ★  $\varphi$ -pinching.

- ★ teorema del entorno canónico ( $\Rightarrow \kappa$ -no colapso).

## 13. La solución estándar

- RF con condición inicial  $(\mathbb{R}^3, g_{st}(0))$  /
  - ★ métrica completa,  $\text{Sec} \geq 0$ , sobre  $\mathbb{R}^3$
  - ★ rotacionalmente simétrica.
  - ★ asintótica en el infinito a  $S^2 \times \mathbb{R}$ , con  $R_{S^2} = 1$ .
- **Existencia:**  $\exists!$  RF  $(\mathbb{R}^3, g_t)$  /  $g_0 = g_{st}(0)$  definido  $\forall t \in [0, 1)$ .
- **Propiedades del flujo:** para cada  $t \in (0, 1)$   $g_t$ 
  - ★ es completa, con  $\text{Sec}_{g_t} > 0$  y acotada.
  - ★ asintótica en el infinito a  $S^2 \times \mathbb{R}$  (flujo estándar)
  - ★ tiene simetría rotacional.
  - ★  $\forall x \in \mathbb{R}^3$  y  $t \in [0, 1)$ , se tiene  $R(x, t) \geq c/(1 - t)$ .

# 14. Descripción (métrica) de la cirugía (II)

- ★ Se elige un parámetro  $0 < \delta \ll \varepsilon$ .
- ★ La cirugía se realiza sobre las  $\varepsilon$ -cornetas de  $\Omega$  con borde en  $\Omega_\rho$ .
- ★ Buscamos cortarlas a lo largo de la esfera central de un  $\delta$ -cuello.

- ★ Automejora de las  $\varepsilon$ -cornetas:  $\forall \delta > 0 \exists h = h(\rho) > 0 /$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } x \text{ está en una } \varepsilon\text{-corneta} \\ \text{y } h(x) \equiv R_{g_T}(x)^{-1/2} < h \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} P(x, T, \delta^{-1}h(x), -h(x)^2) \\ \text{es un } \delta\text{-cuello} \end{array} .$$

- ★ Tomamos  $x$  con  $R(x) = h^{-2}$ .
- ★ Cuello en que se realiza la cirugía  $\equiv S^2 \times (-h/\delta, h/\delta)$

- **Objetivo:** definir una interpolación entre la métrica  $g_c$  de cualquier  $\delta$ -cuello y  $g_{st}(0)$ .

# 15. Técnica de Hamilton para la cirugía

- ★ Sea  $\lambda$  un número a determinar.
- ★ Definimos una nueva métrica como sigue:

$$\hat{g} = \begin{cases} g_c & \text{en } S^2 \times [0, \lambda] \\ e^{-2f(z)} g_c & \text{en } S^2 \times [\lambda, 2\lambda] \\ \hat{g} = e^{-2f} (\psi g_c + (1 - \psi) h^2 g_{st}(0)) & \text{en } S^2 \times [2\lambda, 3\lambda] \\ h^2 g_{st}(0) & \text{en } S^2 \times [3\lambda, c], c \leq 4\lambda \end{cases}$$

- ★ Objetivo: Elegir  $f$  y  $\lambda$  preservando el  $\varphi$ -pinching. En concreto, tomamos

$$f(z) := c_0 e^{-p/(z-\lambda)}, \quad \text{para } z > \lambda.$$

- ★ Resultado [Perelman II]. La operación anterior puede hacerse preservando las hipótesis a priori.

## 16. Primeros resultados

- Se prueba:
  - (1) Eligiendo  $\lambda, p, c_0$  cuidadosamente
    - ★ para  $z \geq 2\lambda$ , la métrica  $e^{-2f}g_c$  tiene curvatura  $> 0$ .
    - ★ el pinching se preserva.
  - (2) Una bola de radio  $(\delta')^{-1}h$  (grande) alrededor del centro está próxima a una bola en la solución estándar, donde  $\delta' = \delta'(\delta)$  (con  $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \delta' \rightarrow 0$ ).
- En concreto,  $\lambda \sim h/\varepsilon$

# 17. Control sobre el $n^o$ de cirugías (a lo largo del tiempo)

- ★ Volumen del semicuello eliminado:  $\sim h^3 / \delta$ .
- ★ Volumen del cuello estándar añadido:  $\sim h^3 / \varepsilon$ .
- ★ Si  $\delta \ll \varepsilon \Rightarrow$  pérdida de volumen  $\gtrsim h^3$  en cada cirugía.

• Posible problema: recuperación del volumen al evolucionar el flujo.

\* Pero sabemos  $Vol_{g_t}(M) \leq e^{-R_{min}(0)t} < \infty$ .

•  $N^o$  de cirugías: depende de  $g_0$  y la elección de los parámetros.

## 18. Resultado fundamental

- Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists$  func. decrecientes  $r(t), \delta(t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$  / para cualquier var. Riem.  $(M, g_0)$  con condiciones iniciales normalizadas, el RF con cirugía con parámetro  $(r(t), \delta(t))$  está bien definido.

Además,

- ★ dicho flujo es  $\kappa(t)$  no colapsado en la escala  $\varepsilon$  para tiempo  $t$ .
- ★ el flujo existe  $\forall t \geq 0$  salvo que la solución se extinga.
- ★ Este resultado especifica de manera precisa los parámetros que controlan la cirugía

## 19. Parámetros que controlan la cirugía

- ★  $\varepsilon > 0$  parámetro de control ordinario, suf. pequeño.
- ★  $r(t)$  escala del entorno canónico, i.e. si  $R(x, t) \geq r(t)^{-2} \Rightarrow \exists$  un entorno parabólico de  $(x, t)$  que está próximo al corresp. entorno en una  $\kappa$ -solución.
- ★  $\delta(t)$  parámetro de control fino ( $\ll \varepsilon$ ), necesario para la cirugía.
- ★  $\rho(t)$  parámetro auxiliar  $= \delta(t)r(t)$ .
- ★  $h(t)$  parámetro de escala o radio de cirugía ( $\leq \delta(t)\rho(t)$ ).
- ★  $\kappa(t)$  parámetro de no-colapso.

## 20. Extinción del flujo en tiempo finito

- Condiciones suficientes para la extinción:

- ★  $R > 0$

- ★ [Perelman III, Colding-Minicozzi]:  $\pi_1(M, g_0)$  finito.

- Corolario: “La conjetura de Poincaré es cierta”

**Dem.**  $\pi_1(M) = \{*\} \Rightarrow$  el RF con cirugía se extingue en  $t$  finito.

- ★ Cada componente que extingue  $\in \{S^3/\Gamma, S^1 \times S^2, \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3\}$

- ★ Trozos que se desprecian  $\cong S^3/\Gamma$  ó  $S^1 \times S^2$ .

Luego:  $M \cong (S^3/\Gamma_1) \# \dots \# (S^3/\Gamma_k) \# S^1 \times S^2 \# \dots \# S^1 \times S^2$ .

$\xrightarrow{\text{tma Van Kampen}} \pi_1(M) = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_k * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}.$

Así pues,

## 21. Comportamiento asintótico del flujo

- Para  $t$  grande, tenemos una descomposición

$$M_t = M_{thick} \cup M_{thin}$$

(1)  $int(M_{thick})$  admite una **métrica completa hiperbólica** /  $Vol < \infty$ .

(2)  $M_{thin}$  es **localmente colapsado**:  $\forall x \in M_{thin} \exists \rho \equiv \rho(x) /$

$$\begin{aligned} Rm &\geq -\rho^{-2} & \text{en } B(x, \rho) \\ Vol(B(x, \rho))^3 &\leq \omega \rho^3 & (\omega \text{ n}^o \text{ pequeño}). \end{aligned}$$

(3) La **descomposición** se hace **a lo largo de toros incompresibles**.

- **Resultado [Perelman, Shioya y Yamaguchi]**:  $\exists \omega$  pequeño /,  $M_{thin}$  es una variedad grafo.

★ **Conocido**: Toda **variedad grafo** ( $\equiv$  formada por una colección finita de espacios Seifert pegados a lo largo de toros embebidos disjuntos) **admite una descomposición geométrica**.

## 22. Consecuencias del comportamiento asintótico

- Corolario: **“La conjetura de Geometrización es cierta”**

**Dem.** de la variedad original:

$$M \cong P_1 \# \dots \# P_r \# (S^3/\Gamma_1) \# \dots \# (S^3/\Gamma_k) \# S^1 \times S^2 \# \dots \# S^1 \times S^2,$$

donde cada

$$P_i \cong H_i \cup G_i \text{ (desc. tórica) } \left\{ \begin{array}{l} H_i \text{ hiperbólica} \\ G_i \text{ variedad grafo} \\ \text{(ambas posib. desconexas)} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow M$  se descompone topológicamente en piezas geométricas.

- Corolario del Corolario:

**“La conjetura de Poincaré es cierta”**