κ-soluciones

Granada, julio de 2007

1. Motivación

Recordemos

• Dilatación de factor $Q_i := |Rm|_{(x_i,t_i)}$

$$g_i(t) = Q_i g(t_i + t/Q_i)$$

⋆ Curvatura de la sucesión dilatada:

$$|Rm|_{g_i(t)}(p) \leq C \quad \begin{cases} \forall\, p \in M \\ \forall\, t \leq 0 \\ \forall\, i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

⋆ El límite (si $\exists$) será una solución

∗ antigua ($t \in (-\infty, 0]$) y

∗ no llana ($|Rm|_{(x_i,0)} = 1\ \forall i$).

y, como consecuencia del pinching de Hamilton-Ivey,

⋆ Si $(M^3_\infty, g_\infty(t))$ es límite de una suc. de dilataciones parabólicas, entonces $Rm_{g_\infty(t)} \geq 0$.

Si ahora añadimos la condición de *kappa*-no colapso, tenemos la defínción de

2. Definición

Un flujo de Ricci g_t es una κ-solución si:

1. Es una solución antigua del flujo de Ricci
2. Para cada t, la métrica g_t es
   - completa
   - $Rm_t \geq 0$
   - $|Rm_t| < C_t$
   - no llana
3. El flujo (M, g_t) es κ-no colapsado en todas las escalas

Observaciones:

4. $|Rm|$ acotada equivale a R acotada
5. $t \mapsto R_t$ es no decreciente (consecuencia de Harnack antiguas)
6. $R_t > 0$ para todo t (consecuencia de Harnack antiguas)

3. Ejemplos

- S^n (flujo estándar) es κ-soluciones, para algún $\kappa > 0$.
- $\mathbb{R} \times S^{n-1}(r)$, $r^2(t) = r_0^2 - 2(n-2)t$
- $\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}_2} S^{n-1}(r)$, $r^2(t) = r_0^2 - 2(n-2)t$, con $(-1)(t, u) = (-t, -u)$, es decir, $\mathbb{R}P^n$ – *bola*.
- $S^1 \times S^{n-1}(r)$, $r^2(t) = r_0^2 - 2(n-2)t$, no es k-no colapsado para $t << 0$.

3. Ejemplos

- Primer objetivo: estructura de las κ-soluciones

Será consecuencia de
La compacidad del conjunto de las κ-soluciones
y para demostrar esto usaremos el comportamiento de:
la razón de curvatura asintótica
la razón de volumen asintótico
teorema de precompacidad

4. $\mathcal{V}$ y $\mathcal{R}$

Definición

Si M es conexa completa de dim. n,

la razón de curvatura escalar asintótica *es* $\mathcal{R} = \limsup_{x\to\infty} R(x)\, d(x,p)^2 := \lim_{r\to\infty} \sup\{R(x)d(x,p)^2;\ d(x,p) \geq r\}$.

la razón de volumen asintótico *es* $\mathcal{V} = \lim_{r\to\infty} r^{-n} \operatorname{vol}(B(p,r))$.

$\mathcal{V}$ existe por Bishop-Gromov.
Son independientes de la elección del punto base p.

4. $\mathcal{V}$ y $\mathcal{R}$

Theorem (R)

$(M, g(\cdot))$ κ-solución no compacta. Entonces $\mathcal{R} = \infty$ en cada hoja temporal.

Theorem (V)

$(M, g(\cdot))$ κ-solución no compacta. Entonces $\mathcal{V} = 0$ en cada hoja temporal $(M, g(t_0))$.
Además, $\exists\ x_k \in M\ x_k \to \infty$ s.t. $\{(M, (x_k, t_0), g(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ converge, módulo rescalamiento por $R(x_k, t_0)$, a una κ-solución que se descompone isometricamente de la forma $Y \times \mathbb{R}$, donde Y es una κ'-solución.

5. Dem Teor V

selección de puntos argumento usado en muchos momentos en el flujo de Ricci

p fijo, $x_i / d_t(x_i, p) \to \infty \implies \exists D_i$ e y_i que verifican $d_t(y_i, p) \to \infty$, $R(y_i, t)D_i^2 \to \infty$ y $R(y, t) \leq 2R(y_i, t)$ para todo $y \in B_t(y_i, D_i R(y_i, t)^{-1/2})$

Si $y_i \neq x_i$, $\exists x_i'$ en esa bola con $R(x_i', t) \geq 2R(x_i, t)$. Tomemos $B_t(x_i', \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D_i}{\sqrt{R(x_i', t)}})$. Si esta bola tampoco sirviera repetiríamos el proceso.

Por tratarse de una progresión geométrica de razón $1/\sqrt{2}$, todas estas bolas están contenidas en $B_t(y_i, 4D_i R(y_i, t)^{-1/2})$, dentro de la cual la curvatura está acotada. Por otro lado, si $R(x_i, t)D_i^2 \to \infty$, también $R(x_i', t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} D_i^2\right) \to \infty$

5. Dem Teor V

Teor V: $(M, g(\cdot))$ κ-solución no compacta. $\mathcal{V} = 0$ en $(M, g(t_0))$.

$\exists\, x_k \in M\ x_k \to \infty$ s.t. $\{(M, (x_k, t_0), g(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ converge, (reesc.) a una $\Upsilon \times \mathbb{R}$, donde Υ es una κ'-solución.

$\mathcal{R} = \infty$. Por selec. ptos., $\exists\, x_k \to \infty$, $s_k > 0$ s.t. $\frac{s_k}{d_{t_0}(x_k, p)} \to 0$,
$R(x_k, t_k) s_k^2 \to \infty$ y $R(x, t_0) \leq 2R(x_k, t_0)\ \forall x \in B_{t_0}(x_k, s_k)$.
$(M, x_k, g_k(t))$, $g_k(t) = R(x_k, t_0)\, g(t_0 + \frac{t}{R(x_k, t_0)})$ and $t \in (-\infty, 0]$.

$$\frac{\partial R}{\partial t} \geq 0 \implies R_k(x, t) \leq 2 \quad \forall t \leq 0 \text{ y } x \in B_k(x_k, R(x_k, t_0)^{1/2} s_k),$$

κ-nocolapso
HCG $\implies$ $\exists$ subsucesión con límite una solución completa $(M_\infty, x_\infty, g_\infty(t))$, $t \in (-\infty, 0]$. En $t = 0$ sta solución tiene un rayo (los x_i acaban quedando a distancia ∞ de p, que acaba en un extremo de una línea). luego, por Cheeger-Gromoll, es un producto $N \times \mathbb{R}$ y, por principio max Hamilton, también lo son los $(M_\infty, x_\infty, g_\infty(t))$. Cuando $n = 2$ esto da una contradicción ya que $R(x_\infty, 0) = 1$ pero $(M_\infty, g_\infty(0))$ producto debe de ser llana.

5. Dem Teor V

Si $\mathcal{V} > 0$, también lo será en en el límite, porque, por Bishop-Gromov, para cada elemento de la sucesión, $\dfrac{Vol(B(x_i, r))}{r^n} \geq \mathcal{V} > 0$.
Cuando $n > 2$ obtenemos una κ'-solución sobre una $(n-1)$-variedad N razón de volumen asintótico positiva en $t = 0$, lo que resulta imposible por inducción.

6. Dem Teor R

Se prueba, por reducción al absurdo, que no son posibles $\mathcal{R}$ finito ni $\mathcal{R} = 0$

En ambos casos se construyen sucesiones convergentes para la contradicción, usando esta vez que convergen a un cono asintótico.

7. Cor.1: Precompacidad y control volumen-curvatura

1. $B(x_0, r_0)$ bola en $t = t_0$ de una κ-solución.
vol. norm. $r_0^{-n}\,\mathrm{vol}(B(x_0, r_0))$ acotado por $> 0 \leftrightarrow$ curv. norm. $r_0^2 R(x_0)$ acotada por arriba.

2. (Precompacidad) Si $(M_k, (x_k, t_k), g_k(\cdot))$ suc. κ-sol (sin hipótesis $R(x_k, t_k) = 1$) y para algún $r > 0$, las $B(x_k, r) \subset (M_k, g_k(t_k))$ tienen volumen normalizado controlado, entonces una subsucesión converge a una solución antigua $(M_\infty, (x_\infty, 0), g_\infty(\cdot))$ con Rm≥ 0, que es κ-nocolapsada (*a priori* la curvatura puede estar acotada en una hoja dada).

3. $\exists\ \eta = \eta(\kappa)$ s.t. $\forall$ κ-solution $(M, g(\cdot))$, y todol $x \in M$,
$|\nabla R|(x, t) \leq \eta R^{\frac{3}{2}}$, $|R_t| \leq \eta R^2$.

4. $\exists\ \alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ que depende solo de κ tal que $\lim_{s\to\infty} \alpha(s) = \infty$, y $\forall$ κ-solution $(M, g(\cdot))$ y $x, y \in M$, tenemos
$R(y)d^2(x, y) \geq \alpha(R(x)d^2(x, y))$.

5. $\exists \alpha : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ dependiendo solo de κ tal que $\lim_{s\to\infty} \alpha(s) = \infty$, y, $\forall$ κ-solución $(M, g(t), x, y \in M, R(y)d^2(x, y) \geq \alpha(R(x)d^2(x, y))$.

8. Cor.2: κ-soluciones de dimensión 2

Las únicas κ-soluciones de dimensión 2 son la esfera redonda y $\mathbb{R}P^2$ (redondo) con su flujo estándar.

9. Cor.3: κ-soluciones de dimensión 3 no compactas

Si (M, g_t) es una κ-solución no compacta de dimensión 3, reescalando por la curvatura escalar se obtiene una sucesión de flujos de Ricci que subconverge a un flujo cilíndrico redondo.

10. teorema de compacidad

• La compacidad del conjunto de las κ-soluciones

⋆ Teorema de compacidad de κ-soluciones [I.11.7] Para cualquier κ fijo, el conjunto de las κ-soluciones punteadas es compacto$^{(*)}$ módulo cambios de escala.
i.e. el conjunto $\{(M, g_t, x)$ κ-solución $/$ $R(x, 0) = 1\}$ es compacto.

Toda sucesión de κ-soluciones $\{(M^\alpha, g_\alpha(t), x^\alpha)\}$ $/$ $R(x^\alpha, 0) = 1$, subconverge a una κ-solución.

Se dice que el conjunto de las κ-soluciones normalizadas es compacto.

$$\left.\begin{array}{l} (M, g_t)\ \kappa\text{-solución} \\ (x_0, t_0) \in M \times (-\infty, 0] \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} \bar{g}(t) = R(x_0, t_0)\, g\left(t_0 + \frac{t}{R(x_0, t_0)}\right) \\ \text{es una } \kappa\text{-solución normalizada.} \end{array}$$

$^{(*)}$ para la topología de la convergencia punteada.

11. ε-cuellos

- **Estructura tipo cuello:** Dada (M^3, g) y $\varepsilon > 0$,

$\star$ ε-cuello centrado en x: $T \subset M \;/\; \exists\, \psi : T \longrightarrow S^2 \times (-1/\varepsilon, 1/\varepsilon)$ difeo. /

$\star$ $\psi(x) \in S^2 \times \{0\}$

$\star$ $(\psi^{-1})^*(R_g(x)g)$ está a distancia ε, en la topología $C^{[1/\varepsilon]}$, de $g_{S^2} + dt^2$, donde $R_{g_{S^2}} = 1$.

$$M_\varepsilon(t) := \{x \in M_t \;/\; x \text{ no es el centro de un } \varepsilon\text{-cuello}\}$$

$\star$ [Perelman, §11.8]: En toda κ-solución 3-dim. M_ε es un conjunto compacto con

$$diam M_\varepsilon \leq C Q^{-1/2},$$
$$C^{-1} Q \leq R(x, 0) \leq C Q \;\forall\, x \in M_\varepsilon,$$
$$\text{donde } Q = R(x_0, 0) \text{ para algún } x_0 \in \partial M_\varepsilon.$$

12. Estructura de las κ-soluciones

- **Teorema de estructura:** $\forall \kappa > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0$ s. t. $\forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists\ \alpha = \alpha(\varepsilon, \kappa)$ / toda κ-solución $(M, g(\cdot))$ cumple una de las opciones siguientes (para cualquier tiempo t):

(A) $M_\varepsilon = \emptyset$ y $(M, g_t) = S^2 \times \mathbb{R}$ con el flujo estándar.

(B) $M_\varepsilon \neq \emptyset$, M no compacta y

$$\forall\ x, y \in M_\varepsilon, \text{ se tiene } R(x) d^2(x, y) < \alpha.$$

(C) $M_\varepsilon \neq \emptyset$, M compacta y $\exists\ x, y \in M_\varepsilon$ / $R(x)d^2(x, y) > \alpha$

$$M_\varepsilon \subset B(x, \alpha R(x)^{-1/2}) \cup B(y, \alpha R(y)^{-1/2})$$

y todo $z \in M \setminus M_\varepsilon$ cumple $R(z)d^2(z, \overline{xy}) < \alpha$.

(D) $M_\varepsilon \neq \emptyset$, M compacta y

$$\exists\ x \in M_\varepsilon \ /\ R(x)d^2(x, z) < \alpha\ \forall\ z \in M.$$

12. Estructura de las κ-soluciones

Topología de una κ-solución $(M, g(\cdot))$:
$(M, g(t))$ tiene curvatura seccional no negativa. Si no tiene curvatura estrictamente positiva, por el ppio del máximo fuerte de Hamilton, el recubridor universal se descompone en el producto por una línea, de lo que se sigue que el recubridor universal es un cilindro redondo y m es $\mathbb{R} \times S^2$ o su $\mathbb{Z}_2$ cociente $\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}_2} S^2$.
If $(M, g(t))$ tiene curvatura estrictamente positiva y M es compacto, entonces es difeomorfo a una forma espacial esférica (Ham 82).
Si $(M, g(t))$ $Sec > 0$ y M is no compacto, entonces es difeomorfo a $\mathbb{R}^3$ Cheeger-Gromoll.

12. Estructura de las κ-soluciones

Lemma

Si $(M, g(t))$ *es* κ*-solución no compacta y* $M_\epsilon \neq \emptyset$ *entonces existe una subvariedad compacta con borde* $X \subset M$ *tal que* $M_\epsilon \subset X$*, y* X *difeomorfa a* $\overline{B^3}$ $\mathbb{R}P^3 - B^3$*, and* $M - \mathrm{int}(X)$ *is diffeomorphic to* $[0, \infty) \times S^2$*.*

12. Estructura de las κ-soluciones

Lemma

Si $(M, g(t))$ es κ-solución con $M_\epsilon = \emptyset$ entonces el flujo de Ricci es el del cilindro redondo $\mathbb{R} \times S^2$.

12. Estructura de las κ-soluciones

- Solitones asintóticos

$\star$ §11.2 Sea (M^n, g_t) una κ-solución.
$\exists\ \{(x_k, t_k)\}\ /\ \{(M, -(t_k)^{-1} g(t_k - t_k t), x_k)\}$ subconverge, cuando $t_k \to -\infty$, a un solitón gradiente contractivo y no llano.

(solitón asintótico)$\equiv M_{-\infty}$

$*$ En la dem. se usa la distancia y el volumen reducidos.
$\star$ El lím. es no κ-colapsado, pero en general no tiene curvatura acotada en cada hoja temporal.

$\star$ Corolario del teor. compacidad: Todo solitón asintótico 3 dim es una κ-solución.

(κ-solitón asintótico)

12. Estructura de las κ-soluciones

κ-solitones asintóticos 3-dim: clasificación

- Sabemos Sec ≥ 0, por ser κ-soluciones.
- Distinguiremos 2 posibilidades:

Sec $\not> 0$level= 2 $\xrightarrow[\text{fuerte}]{\text{ppio max}} \left[\begin{array}{l} \widetilde{M} = N^2 \times \mathbb{R}, \\ g_t = h_t + dt^2 \ / \ R_{h_t} > 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\S 11.3]{\text{Perelman}}$

$\left[\begin{array}{l} \widetilde{M} = S^2 \times \mathbb{R} \\ \text{(flujo estándar)} \end{array} \right]$

$\longrightarrow M = S^2 \times \mathbb{R}/\Gamma \longrightarrow M = \left\{ \begin{array}{ll} S^2 \times \mathbb{R}, & S^2 \times \mathbb{R}/Z_2 \\ S^2 \times S^1, & S^2 \times S^1/Z_2 \end{array} \right\}$

$\xrightarrow{\text{Knopf-Ilmanen}} M = \{ \ S^2 \times \mathbb{R}, \quad S^2 \times \mathbb{R}/Z_2 \cong \mathbb{R}P^3 \setminus B^3 \ \}$ donde la acción de Z_2 viene dada por $(x,s) \sim (-x,-s)$.

$\star$ Sec > 0level= 2

$\left\{ \begin{array}{lll} \text{compacta } \textit{level}= 8 & \xrightarrow[\text{espacial (TFE)}]{\text{tma. forma}} \cong S^3/G \xrightarrow[+\text{TFE}]{\text{autosim.}} & S^3/G \text{ (flujo estándar)} \\ \text{no compacta } \textit{level}= 8 & \xrightarrow[II.1.2]{\text{Perelman}} & \text{no es posible.level= 11} \end{array} \right.$

12. Estructura de las κ-soluciones

Una κ-solución tiene un solitón asintótico
Si el solitón asintótico de una κ-solution $(M, g(\cdot))$ es también compacto, entonces es un cociente de la esfera contractiva S^3, y lo mismo es cierto para M.

Lemma

Si una κ-solución $(M, g(\cdot))$ es compacta y tiene un solitón asintótico no compacto, entonces M es difeomorfo a S^3 or $\mathbb{R}P^3$.

12. Estructura de las κ-soluciones

Toda solución antigua que es una κ-solución *para algún* κ es o una κ_0-solución o un cociente métrico de la esfera redonda S^3.

Lemma

Existe una constante universal η tal que en cada punto de una solución antigua que es una κ-solution para algún κ, tenemos las estimaciones

$$|\nabla R| < \eta R^{\frac{3}{2}}, \quad |R_t| < \eta R^2. \tag{1}$$

12. Estructura de las κ-soluciones

Lemma

Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se puede encontrar $C_1 = C_1(\epsilon)$ and $C_1 = C_1(\epsilon)$ tales que para cada punto (x, t) en toda κ-solución existe un radio $r \in [R(x,t)^{-1/2}, C_1 R(x,t)^{-1/2}]$ y un entorno B, $B(x,t,r) \subset B \subset B(x,t,2r)$, que cae en una de las siguientes clases:

(a) B es un ϵ-cuello fuerte (con más precisión, la hoja de un ϵ-cuello fuerte en su tiempo maximal), o

(b) B es un ϵ-gorro, o

(c) B es una variedad cerrada difeomorfa a S^3 o $\mathbb{R}P^3$, o

(d) B es una variedad cerrada de curvatura seccional positiva constante..

Además, la curvatura escalar en B en el tiempo t está entre $C_2^{-1}R(x,t)$ y $C_2 R(x,t)$, su volumen en los casos (a), (b) y (c) es mayor que $C_2^{-1}R(x,t)^{-\frac{3}{2}}$, y en el caso (c) la curvatura seccional en B en el tiempo t es mayor que $C_2^{-1}R(x,t)$.